
ECG - Lycée Ozenne

Maths appliquées

Enseignement de mathématiques en ECGB1

Année 2026-2027

Professeur : Madame BLAZERE

Présentation

Chers futurs élèves,

Je me présente, je suis madame Blazère, votre future enseignante en mathématiques pour l'année 2026-2027.

Je tiens par ce message à vous souhaiter la bienvenue en CPGE et dans ma classe tout particulièrement. Nous travaillerons ensemble pour que vous puissiez donner le meilleur de vous même, sans jamais oublier l'optique des concours qui représentent la finalité des deux années de prépas. Comme vous le verrez très vite, la classe préparatoire vous demandera beaucoup de votre temps et de votre énergie, mais elle vous apportera aussi une expérience extrêmement enrichissante.

J'attends de vous du sérieux, du travail, de l'écoute et de l'investissement. Mais je ne doute pas que vous saurez faire preuve de tout cela.

Organisation de la matière

L'enseignement des mathématiques représente une part importante du programme en ECGB1. L'enseignement des mathématiques en première année se répartit comme suit :

- 6h de cours,
- 2h de TD,
- 1h de TP d'informatique en Python,

auxquels viendront se rajouter 1h de colle toutes les deux semaines, 5 devoirs de 4h, 1 concours blanc en fin d'année et des petits contrôles réguliers.

Le programme de mathématiques en ECGB1, comme vous le verrez, fait intervenir à la fois de l'algèbre (logique et raisonnement, calcul matriciel et résolution de systèmes linéaires, espaces

vectoriels et applications linéaires), de l'analyse (suites de nombres réels, fonctions réelles d'une variable réelle, calcul intégral et équations différentielles, étude élémentaire des séries) ainsi que des probabilités (probabilités sur un univers fini, variables aléatoires discrètes, statistiques) qui représente une partie importante du programme.

Pré-requis

Il est indispensable que les notions vues en Terminale soient parfaitement maîtrisées pour la rentrée. Vous trouverez ci-dessous un devoir maison, avec des rappels et des exemples rédigés à chercher pendant les vacances et à me rendre à la rentrée (le cours et les exemples sont à lire et les exercices à chercher et à me rendre rédigés sur feuilles lors du premier cours de maths). Ce document vous aidera à réviser les notions importantes de calculs (opérations sur les fractions, identités remarquables, dérivation...). Et ce afin que vous vous assuriez que ces points ne vous posent pas de problèmes (dans le cas contraire il vous faudra les travailler pendant l'été) et que vous puissiez partir sur de bonnes bases dès la rentrée de septembre.

Des références

Il n'y a pas de livres spécifiques à acheter en maths, car le cours polycopié, les feuilles de TD, les devoirs, les dm et les fiches méthodes que je vous distribuerai pendant l'année se suffisent à eux-mêmes.

Vous trouverez les cours et les TD sur mon site

blazereECGB1ozenne.blogspot.com .

J'ai écrit un livre qui s'intitule

[Mathématiques-Réviser et consolider les bases de Terminale pour réussir la 1re année d'ECG-Complément Python-2e édition](#)

A nouveau il n'y a aucune obligation à acheter ce livre ni à le travailler, car vous avez le devoir maison ci-joint qui vous permettra déjà de bien réviser les bases. Mais si vous voulez approfondir le devoir maison de révision cela peut être un bon outil.

Par contre, je veux que vous achetiez pour la rentrée un petit carnet/cahier (taille A5 environ, page blanche ou à carreaux comme vous préférez) dans lequel vous mettrez les astuces à retenir, les erreurs que vous avez tendance à faire et qu'il ne faut pas faire, etc. Carnet que vous actualiserez tout au long de l'année et relirez régulièrement, notamment avant chaque devoir. Vous verrez cela vous aidera à progresser !

Contact

Tout cela vous sera bien sûr expliqué plus en détails à la rentrée. Je reste à votre disposition pendant l'été pour répondre aux interrogations que vous pourriez avoir. Merci de m'envoyer un mail, dès que vous lirez ce document, dans lequel vous m'indiquez votre nom et votre prénom afin que je puisse enregistrer votre adresse personnelle à laquelle je vous écrirai si besoin pendant l'année.

Pour me contacter, vous pouvez m'écrire à l'adresse suivante :

blazere.ece1@free.fr

Reposez vous bien pendant les vacances pour commencer l'année en forme en septembre.

En attendant d'avoir le plaisir de faire votre connaissance à la rentrée prochaine, je vous souhaite de belles vacances.

Mme. BLAZERE

Le document qui suit est construit de la manière suivante : j'ai mis l'ensemble des bases qui me semblent importantes de maîtriser pour bien commencer l'année en ECG. Pour chacune des notions importantes, j'ai mis des rappels de cours, des exemples pour les illustrer ainsi que des petits exercices de mise en application directe du cours.

Je vous demande de chercher et rédiger ces exercices sur feuille pendant l'été et de me rendre ce que vous aurez fait à la rentrée.

Cela me permettra ainsi d'avoir une idée de votre niveau (ne vous inquiétez pas s'il y a des points que vous n'arrivez vraiment pas à faire, il ne sera pas noté), de vous indiquer les points qui vont et ceux qui ne vont pas et de voir ainsi les points qui posent problème et qu'il me faudra reprendre avec vous en septembre. Nous prendrons deux semaines à la rentrée pour faire des "révisions" de Terminale, je mets le mot "révisions" entre parenthèse car je sais bien qu'avec les différences de programme et de niveau entre la spécialités maths et les maths complémentaires, il y a sans doute des points qui auront été très partiellement vu au lycée pour certains d'entre vous. Ce sera ainsi l'occasion de remettre tout le monde à niveau.

Même s'il y a des points dans ce document qui ne vous parle pas plus que ça, essayer de les travailler le maximum en autonomie pendant les vacances en travaillant et **apprenant** les points de cours et en vous inspirant des exemples. Vous serez ainsi plus à l'aise à la rentrée.

Sur la copie que vous me rendrez à la rentrée, inutile de recopier le cours ou les exemples. Rédigez simplement les exercices en indiquant bien leur numéro.

Faites les calculs de tête ou au brouillon mais toujours "à la main", car la calculatrice est interdite en prépa, comme le jour du concours.

Bon travail !

0.1 Rappel : calculs dans les réels

0.1.1 Fractions de deux nombres réels

 $\frac{0}{a} = 0$ mais $\frac{a}{0}$ n'a aucun sens !

► Pour que la fraction $\frac{a}{b}$ ait du sens, il faut que $b \neq 0$.

Proposition 0.1 (Opérations sur les fractions)

Soient a, b, c, d des entiers tels que $b \neq 0$ et $c \neq 0$.

- Simplification de fractions

$$\frac{c \times a}{c \times b} = \frac{a}{b}.$$

- Addition de fractions

$$\frac{a+d}{c} = \frac{a}{c} + \frac{d}{c}.$$

- Produit de deux fractions

$$\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}.$$

Remarques 0.1

- $\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ en général.
Par exemple, $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ n'est pas égal à $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2$.
- $\frac{c+a}{c+b} \neq \frac{a}{b}$ en général.
Par exemple, $\frac{2+7}{2+9} = \frac{9}{11}$ et n'est pas égal à $\frac{7}{9}$.
- $\frac{a+d}{c+b} \neq \frac{a}{c} + \frac{d}{b}$ en général.
Par exemple, $\frac{3+4}{1+2} = \frac{7}{3}$ et n'est pas égal à $\frac{3}{1} + \frac{4}{2} = 3 + 2 = 5$.

Méthode 0.1 (Simplifier des fractions)

Pour simplifier une fraction, pensez à décomposer le numérateur et le dénominateur en produit de nombres premiers (entiers naturels qui admettent exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs, tels que 2, 3, 5, 7, ...). Il est important pour cela de bien connaître ses tables de multiplication. On en profitera donc pour les réviser.

On peut alors ensuite simplifier les termes communs qui sont en facteur à la fois au numérateur et au dénominateur, en utilisant la formule

$$\frac{\cancel{c} \times a}{\cancel{c} \times b} = \frac{a}{b}.$$

On appelle **fraction irréductible** une fraction qui ne peut plus être simplifiée.

Remarque 0.2

$$\frac{c+a}{c+b} \neq \frac{a}{b} \text{ en général.}$$

On ne peut simplifier par c que si c est en facteur (produit et non somme) au numérateur et au dénominateur.

Exemple 0.1. $\frac{42}{30} = \frac{2 \times 21}{3 \times 10} = \frac{2 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 5} = \frac{7}{5}$

Exercice 0.1. Simplifier :

• $\frac{21}{15}$

• $\frac{42}{14}$

• $\frac{24}{144}$

• $\frac{105}{49}$

Méthode 0.2 (Réduire au même dénominateur)

Pour écrire sous forme d'une fraction irréductible une somme de fractions, on procède comme suit :

1. Décomposer les deux dénominateurs en produit de nombres premiers (entiers naturels qui admettent exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs, tels que 2, 3, 5, 7, ...).
2. Chercher le dénominateur commun le plus petit.
Le dénominateur commun le plus petit sera composé des nombres premiers apparaissant dans chacun des deux dénominateurs initiaux mis à la plus grande des puissances apparaissant dans les dénominateurs initiaux.
3. Réduire au même dénominateur.
4. Simplifier.

Exemple 0.2. • Ecrire sous forme d'une fraction irréductible $\frac{2}{18} - \frac{1}{12}$.

On pourrait choisir comme dénominateur commun 18×12 , mais ça fait un gros chiffre à calculer et étant donné que la calculatrice est interdite au concours, il faut mieux chercher un dénominateur commun plus petit. Autrement, il faudrait calculer $\frac{2 \times 12}{18 \times 12} - \frac{1 \times 18}{12 \times 18}$.

On a : $18 = 2 \times 9 = 2 \times 3^2$ et $12 = 3 \times 4 = 3 \times 2^2$.

D'où, le dénominateur commun est $2^2 \times 3^2 = 36$.

En effet, les entiers apparaissant dans 18 ou 12 sont 2 et 3.

Dans 18, 2 apparaît à la puissance 1 et dans 12 à la puissance 2.

D'où la plus grande puissance de 2 intervenant est 2^2 .

Dans 18, 3 apparaît à la puissance 2 et dans 12 à la puissance 1.

D'où la plus grande puissance de 3 intervenant est 3^2 .

Le dénominateur commun le plus petit sera donc $2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$. Ce qui se réécrit

$$\text{aussi : } 36 = 2 \times 3^2 \times 2 = 18 \times 2 \text{ et } 36 = 2^2 \times 3 \times 3 = 12 \times 3.$$

$$\text{Ainsi : } \frac{2}{18} - \frac{1}{12} = \frac{2 \times 2}{18 \times 2} - \frac{1 \times 3}{12 \times 3} = \frac{4}{36} - \frac{3}{36} = \frac{4-3}{36} = \frac{1}{36}.$$

- Ecrire sous forme d'une fraction irréductible $\frac{1}{6} - \frac{1}{15}$.

On pourrait choisir comme dénominateur commun 6×15 , mais ça fait un gros chiffre à calculer et étant donné que la calculatrice est interdite au concours, il faut mieux chercher un dénominateur commun plus petit.

On a : $6 = 2 \times 3$ et $15 = 3 \times 5$.

D'où, le dénominateur commun est $2 \times 3 \times 5 = 30$.

Ce qui se réécrit aussi : $30 = 6 \times 5$ et $30 = 15 \times 2$.

$$\text{Ainsi : } \frac{1}{6} - \frac{1}{15} = \frac{1 \times 5}{6 \times 5} - \frac{1 \times 2}{15 \times 2} = \frac{5}{30} - \frac{2}{30} = \frac{5-2}{30} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}.$$

Exercice 0.2. Simplifier :

- $\frac{7}{6} - \frac{1}{15}$
- $\frac{5}{6} + \frac{1}{15}$
- $\frac{3}{14} - \frac{2}{28}$
- $\frac{5}{18} + \frac{1}{24}$

Méthode 0.3 (Quotient de fractions)

Écriture utile pour simplifier des fractions de fractions :

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{c}{b}.$$

Plus généralement,

$$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = a \times \frac{c}{b}.$$

On retiendra que diviser par une fraction c'est multiplier par son inverse.

Exemple 0.3. $\frac{\frac{2}{9}}{\frac{7}{3}} = \frac{2}{9} \times \frac{3}{7} = \frac{2 \times 3}{9 \times 7} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3 \times 7} = \frac{2}{3 \times 7} = \frac{2}{21}.$

Remarque : pensez à simplifier avant de faire le produit au numérateur et dénominateur, autrement vous n'aurez pas à la fin de fraction irréductible et vous devrez donc redécomposer le numérateur et le dénominateur pour simplifier.

Ainsi, dans notre exemple, si nous n'avions pas vu la simplification par 3, nous aurions eu $\frac{2 \times 3}{9 \times 7} = \frac{6}{63}$ et il aurait fallu voir la simplification par trois a posteriori.

Exercice 0.3. Écrire les nombres suivants sous forme de fractions irréductibles :

$$A = \frac{\left(\frac{8}{21}\right)}{4}, \quad B = \frac{8}{\left(\frac{21}{4}\right)}, \quad C = \frac{\left(\frac{8}{21}\right)}{\left(\frac{4}{7}\right)}, \quad D = \frac{2 \times \frac{5}{3} - \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2} - 3\right)^2}.$$

0.1.2 Puissance entière d'un nombre réel**Définition 0.1**

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit $x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_n$ pour $n \geq 1$ et par convention $x^0 = 1$.

Exemple 0.4. $x^2 = x \times x$, $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 4 \times 2 = 8$.

Propriétés 0.1 (Règles de calcul)

Soient $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}^*$ et $y \in \mathbb{R}^*$,

- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
- $x^n \times x^m = x^{n+m}$
- $(x^n)^m = x^{n \times m} = x^{m \times n}$
- $(x \times y)^n = x^n \times y^n$
- $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}.$

Exemple 0.5. $x^{-2} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x \times x}$, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, $x^2 \times x^3 = x^{2+3} = x^5$, $\frac{3^2}{2 \times 3^5} = \frac{1}{2} \times \frac{3^2}{3^5} = \frac{1}{2} \times 3^{2-5} = \frac{1}{2} \times 3^{-3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^3}.$

Méthode 0.4 (Simplifier des fractions avec des puissances)

On décompose les entiers sous la puissance en produit de nombres premiers (entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs, tels que 2, 3, 5, 7, ...), puis on utilise les propriétés des puissances pour simplifier.

Exemple 0.6.

- $\frac{3^2 \times 12}{2^3 \times 3^4} = \frac{3^2 \times 3 \times 4}{2^3 \times 3^4} = \frac{3^{2+1} \times 2^2}{2^3 \times 3^4} = \frac{3^3 \times 2^2}{2^3 \times 3^4} = \frac{3^3}{3^4} \times \frac{2^2}{2^3} = 3^{3-4} \times 2^{2-3} = 3^{-1} \times 2^{-1}$
de la forme $3^n \times 2^p$ avec $n = -1$ et $p = -1$.
- $\frac{10^3}{5^2} = \frac{(2 \times 5)^3}{5^5} = \frac{2^3 \times 5^3}{5^5} = 2^3 \times \frac{5^3}{5^5} = 2^3 \times 5^{3-5} = 2^3 \times 5^{-2} = 8 \times \frac{1}{5^2} = \frac{8}{25}$.

Exercice 0.4. Écrire les nombres suivants sous forme $5^n \times 2^p$ avec n et p deux entiers relatifs que l'on précisera :

1. $A = (5^2 \times 10^3)^3$

2. $B = \frac{2^{-3} \times 25}{(5^2)^3 \times 2^{-1}}$

3. $C = \frac{25}{8}$

Exercice 0.5.

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{15^3}{3^{25}9}, \quad B = \frac{24 \times 10^{-7}}{3 \times 10^{-5}}, \quad C = 8 \times (7 \times 5)^5 \times \frac{5^2 \times 7^3}{7^4 \times 5^5} \times (7^{-2})^2.$$

Proposition 0.2 (Identités remarquables)Soient a et b deux nombres réels, on a

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Exemple 0.7. Développer $A = (x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 + 2x + 1)$.On a $A = x^5 + 2x^4 + x^3 + x^4 + 2x^3 + x^2 + x^3 + 2x^2 + x + x^2 + 2x + 1 = x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, en utilisant le fait que $x^3 \times x^2 = x^{3+2} = x^5, \dots$ **Exercice 0.6.** Développer et simplifier les expressions suivantes :

• $A = (2x^2 + 2x + 3)(x + 1)$

• $C = (3x + 1)^2 - (x + 2)^2$

• $B = (-2 + x)^2$

• $D = (x + 3)^3$

• $E = (1 + x)^2 + (1 - x)(1 + x).$

Méthode 0.5 (Factoriser)

Pour factoriser :

- On repère dans l'expression le ou les facteurs communs à tous les termes intervenant dans la somme.
- On écrit ce terme ou ces termes multiplié par les autres termes en facteur mis entre crochet, en respectant les signes + et - intervenant dans l'expression.
- On simplifie ensuite ce qu'il y a à l'intérieur du crochet.

*Pensez à la fin à vérifier vos résultats en développant l'expression obtenue.***Exemple 0.8.** Factoriser $A = (x - 5)(x + 2) - (2x + 3)(x + 2)$.

On a :

$$\begin{aligned} A &= (x-5)(x+2) - (2x+3)(x+2) \\ &= (x+2)[(x-5) - (2x+3)] \\ &= (x+2)[x-5-2x-3] \\ &= (x+2)[-x-8] \\ &= (x+2)[(-1) \times x + (-1) \times 8] \\ &= (x+2)(-1)(x+8) \\ &= -(x+2)(x+8). \end{aligned}$$

Exemple 0.9. Autres astuces pour factoriser quand on ne voit pas directement de facteurs communs.

Factoriser :

- $A = (x^2 - 4x + 1)^2 - (6x^2 - 3x + 1)^2$.
- $B = (x+3)(2x^2 - 8) - (x^2 + 4x + 4)(x-2)$.

Solution :

- $$\begin{aligned} A &= (x^2 - 4x + 1)^2 - (6x^2 - 3x + 1)^2 \\ &= (x^2 - 4x + 1 + 6x^2 - 3x + 1)(x^2 - 4x + 1 - 6x^2 + 3x - 1) \\ &= (7x^2 - 7x + 2)(-5x^2 - x) \\ &= -x(5x+1)(7x^2 - 7x + 2). \end{aligned}$$

En utilisant l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, avec $a = x^2 - 4x + 1$ et $b = 6x^2 - 3x + 1$.

- $$\begin{aligned} B &= (x+3)(2x^2 - 8) - (x^2 + 4x + 4)(x-2) \\ &= (x+3)2(x^2 - 4) - (x+2)^2(x-2), \end{aligned}$$

en repérant l'identité remarquable $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$.

Puis $B = (x+3)2(x+2)(x-2) - (x+2)^2(x-2)$,

en utilisant l'identité remarquable $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ (car de la forme $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ avec $a = x$ et $b = 2$).

D'où $B = (x+3)2(x+2)(x-2) - (x+2)^2(x-2) = (x+2)(x-2)[(x+3)2 - (x+2)] = (x+2)(x-2)[x+4]$

Exercice 0.7. Factoriser au maximum les expressions suivantes :

- $A = (x+2)(3x^2+1) - (x+1)(x+2)$
- $C = (x-1)^2 - (x-1)(x+3)$
- $B = x^2 - 16 + 3(x-4)$

0.1.3 Racine carrée d'un nombre réel positif

Définition 0.2

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. La racine carrée de x est le nombre réel positif, noté $\sqrt{x}$, dont le carré est égal à x . Autrement dit, il vérifie

$$\sqrt{x} \times \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 = x.$$

Exemple 0.10. $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $(\sqrt{5})^2 = 5$.

Propriétés 0.2

Soit $x \geq 0$ et $y \geq 0$ deux réels, on a

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}, \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}} \text{ si de plus } y \neq 0.$$

Exemple 0.11. $\sqrt{9}\sqrt{5}\sqrt{15}\sqrt{12} = 3\sqrt{5}\sqrt{3} \times 5\sqrt{4} \times 3 = 3\sqrt{5}\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{4}\sqrt{3} = 3 \times 2 \times \sqrt{5}\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{3} = 6\sqrt{5}\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{3} = 6(\sqrt{5})^2(\sqrt{3})^2 = 6 \times 5 \times 3 = 90$

Exercice 0.8.

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2), \quad B = \sqrt{\frac{16}{25}}, \quad C = \sqrt{6} \times \sqrt{5} \times \sqrt{18} \times \sqrt{15}.$$

0.1.4 Comparaison de réels

Nous verrons plusieurs techniques pour comparer des réels entre eux, mais la technique la plus classique pour montrer par exemple que $a \leq b$ est de montrer que $b - a \geq 0$.

De manière générale, comparer deux réels revient à étudier le signe de leur différence.

Lorsque l'on a le signe d'une différence de deux réels à étudier, on cherche à factoriser cette différence au maximum et ensuite on étudie le signe de chacun des facteurs.

Si l'on a à étudier le signe de la différence de deux fractions, la première étape consiste à réduire ces deux fractions au même dénominateur.

Exemple 0.12. Montrer que $\forall x \in [-1, 1]$, $\frac{1}{x^2 + x + 1} \geq \frac{(2x+1)x}{(x^2 + x + 1)^2}$.

Solution :

Soit $x \in [-1, 1]$, on a :

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} - \frac{(2x+1)x}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{1(x^2 + x + 1) - (2x+1)x}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Or, $\forall x \in [-1, 1]$, $1 - x \geq 0$ et $1 + x \geq 0$ et $(x^2 + x + 1)^2 \geq 0$.

D'où $\forall x \in [-1, 1]$, $\frac{1}{x^2 + x + 1} - \frac{(2x+1)x}{(x^2 + x + 1)^2} \geq 0$.

Et donc $\forall x \in [-1, 1]$, $\frac{1}{x^2 + x + 1} \geq \frac{(2x+1)x}{(x^2 + x + 1)^2}$.

Exercice 0.9. Montrer que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{1+x} \leq 1.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} > \frac{1}{(x+1)^2}.$
3. $\forall x \geq 1, \frac{4x-2}{x+1} \geq 1.$

0.2 Équations

On commence par donner l'ensemble de définition de l'équation, c'est à dire l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'équation est bien définie (généralement c'est tout $\mathbb{R}$, sauf quand il y a des racines carrées (définie que sur $\mathbb{R}_+$) ou du logarithme (définie que sur $\mathbb{R}_+^*$)) ou quand il y a des quotients (le dénominateur ne doit alors pas s'annuler sinon on divise par 0!).

► Lorsqu'on souhaite résoudre une équation du type $f(x) = g(x)$, on se ramène généralement à une équation de la forme $h(x) = 0$ (en utilisant les opérations sur les égalités énoncées plus haut), avec $h(x)$ écrit sous forme d'un produit de facteurs du type $ax + b$ ou $ax^2 + bx + c$ (si possible).

► Un produit de facteurs valant 0 si et seulement si au moins un des facteurs vaut 0, on est ensuite ramené à résoudre uniquement des équations du type $ax + b = 0$ ou $ax^2 + bx + c = 0$.

0.2.1 Équations de degré un

Théorème 0.1 (Équation du premier degré)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. L'équation $ax + b = 0$ admet une unique solution qui vaut $-\frac{b}{a}$.

Méthode 0.6 (Résolution d'une équation du premier degré)

Exemple : Résoudre l'équation (E) : $3x + 1 = 0$.

Solution :

1) Ensemble de définition de (E) :

$$D_{(E)} = \mathbb{R}.$$

2) Résolution :

Soit $x \in D_{(E)}$,

$$\begin{aligned} 3x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x &= -1 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

3) Conclusion :

$$S = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}.$$

4) Vérification : $3 \times \left(-\frac{1}{3} \right) + 1 = -1 + 1 = 0$

Exercice 0.10. Résoudre l'équation (E) : $-2x + 1 = 0$.

0.2.2 Équations de degré deux

Théorème 0.2 (Équation du second degré)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors :

- si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions $\begin{cases} x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$ et on a la factorisation

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

- si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et on a la factorisation

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

- si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution.

Méthode 0.7 (Résolution d'une équation de degré deux)

Exemple : Résoudre l'équation (E) : $2x^2 + x - 6 = 0$

Solution :

1) Ensemble de définition de (E) :

$$D_{(E)} = \mathbb{R}.$$

2) Résolution :

$2x^2 + x - 6$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = 1$ et $c = -6$.

Son discriminant Δ vaut :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 1 + 48 = 49 > 0.$$

D'où $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$ et le trinôme $2x^2 + x - 6$ admet deux racines qui sont

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 7}{4} = -\frac{8}{4} = -2$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 7}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Attention à ne pas oublier de diviser par $2a$ et non par 2, lorsque a est différent de 1.

3) Conclusion :

$$S = \left\{ -2; \frac{3}{2} \right\}$$

4) Vérification : $2(-2)^2 - 2 - 6 = 0$. De même pour $\frac{3}{2}$.

Exercice 0.11. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $x^2 + 5x + 6 = 0$ et $x^2 + x + 1 = 0$ et factoriser si possible le trinôme du second degré associé.

Proposition 0.3 (Cas particulier)

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. L'équation $x^2 = a$ n'a de sens que si $a \geq 0$. Plus précisément
 - Si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ possède deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
 - Si $a = 0$, l'équation $x^2 = a$ possède une seule solution 0.
 - Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ ne possède aucune solution réelle.
2. L'équation $\sqrt{x} = a$ n'a de sens que si $x \geq 0$ et elle ne possède des solutions que si $a \geq 0$. Dans ce cas, l'équation possède une unique solution qui est a^2 .

Remarque 0.3

$x^2 - 8 = 0$ est un cas particulier de trinôme du second degré.

Mais on résout plutôt ce type d'équation sans passer par le calcul du discriminant et en écrivant tout simplement :

$$x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = -\sqrt{8} \text{ ou } x = \sqrt{8}.$$

$$\text{Remarque : } \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Exercice 0.12. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $x^2 + 6 = 0$ et $x^2 - 3 = 0$.

0.2.3 Méthode générale**Méthode 0.8**

1. Si on a directement des équations de degré un ou deux du type $ax + b = 0$ ou $ax^2 + bx + c$ alors on sait parfaitement les résoudre en utilisant le théorème 0.1 ou 0.2.
2. Sinon, on regroupe tout dans le membre de gauche et on cherche à factoriser au maximum l'expression obtenue, pour se ramener à des facteurs de degré un ou deux.
3. Si aucune factorisation n'est possible, on développe pour voir s'il n'y aurait pas des simplifications qui permettraient de se ramener à des équations de degré un ou deux.

Exemple 0.13. Résoudre l'équation (E) : $3(x+1)(x+3) = (x+3)^2$

Solution :

1) Ensemble de définition de (E) :

$$D_{(E)} = \mathbb{R}.$$

2) Résolution :

Soit $x \in D_{(E)}$,

$$\begin{aligned} & 3(x+1)(x+3) = (x+3)^2 \\ \Leftrightarrow & 3(x+1)(x+3) - (x+3)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x+3)[3(x+1) - (x+3)] = 0 \\ \Leftrightarrow & (x+3)(2x) = 0 \\ \Leftrightarrow & x+3 = 0 \text{ ou } 2x = 0 \\ \Leftrightarrow & x = -3 \text{ ou } x = 0 \end{aligned}$$

3) Conclusion :

$$S = \{0; -3\}$$

4) Vérification : $3(0+1)(0+3) = 9$ et $(0+3)^2 = 9$, de même pour -3 .

Remarques :

1. **Attention, vous pourriez être tenté de diviser par $(x + 3)$ les deux membres de l'équation (E) et écrire :**

$$\begin{aligned} & 3(x+1)(x+3) = (x+3)^2 \\ \Leftrightarrow & 3(x+1) = x+3 \\ \Leftrightarrow & 2x = 0 \end{aligned} .$$

Ceci est faux !

En effet, $x \in D_{(E)=\mathbb{R}}$, d'où $x + 3$ peut être égal à 0 (si x vaut -3), auquel cas vous divisez par 0. Ce qui est strictement interdit. En plus vous oubliez dans ce cas une solution possible qui est justement -3 .

2. **Parfois la factorisation n'est pas évidente.** Si ça ne l'est pas, pensez déjà à factoriser les trinômes du second degré qui pourraient apparaître (soit en faisant apparaître des identités remarquables, soit en calculant les racines et en utilisant la technique de factorisation vue en cours).

Par exemple :

- (a) $(x+1)(x+5) - (x+3)(x^2+3x+2) = (x+1)(x+5) - (x+3)(x+1)(x+2)$,
car $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$ en factorisant par la méthode du cours,
- (b) $x^2-16 - (x-4)(x+5)^2 = (x-4)(x+4) - (x-4)(x+5)^2$,
car $x^2-16 = (x-4)(x+4)$ en reconnaissant une identité remarquable.

3. **En dernier recours**, on développe et on voit si on peut simplifier et se ramener à un des cas précédents.

Exercice 0.13. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $2x + 5 = 0$
2. $3x - 7 = 5(x + 2) + 8$
3. $x^2 - 5x + 6 = 0$
4. $x(x - 1) + (x + 4)(x - 1)^2 = 0$

0.2.4 Équations avec quotients

Méthode 0.9

Exemple : Résoudre l'équation (E) : $\frac{x}{x+2} + \frac{2}{x} = -3$

Solution :

1) Ensemble de définition de (E) :

Ici il est très important de donner d'abord l'ensemble de définition.

Pour que l'équation soit bien définie, il faut que $x+2 \neq 0$ et que $x \neq 0$, c'est à dire $x \neq -2$ et $x \neq 0$ (afin que l'on ne divise pas par 0).

D'où,

$$D_{(E)} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}.$$

2) Résolution de l'équation :

Soit $x \in D_{(E)}$.

On regroupe tout d'abord l'ensemble des termes dans un même membre et puis on réduit au même dénominateur.

$$\begin{aligned} & \frac{x}{x+2} + \frac{2}{x} = -3 \\ \Leftrightarrow & \frac{x}{x+2} + \frac{2}{x} + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x}{x^2} + \frac{2(x+2)}{x(x+2)} + \frac{3x(x+2)}{x(x+2)} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2 + 2(x+2) + 3x(x+2)}{x(x+2)} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{4x^2 + 8x + 4}{x(x+2)} = 0 \\ & \text{car une fraction est nulle si et seulement si son numérateur est nul} \\ \Leftrightarrow & 4x^2 + 8x + 4 = 0 \\ & \text{à noter qu'on est ainsi ramené à résoudre une équation sans fractions} \\ \Leftrightarrow & 4(x^2 + 2x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 + 2x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x+1)^2 = 0 \\ & \text{en reconnaissant une identité remarquable, ou sinon on passe par le calcul du discriminant} \\ \Leftrightarrow & x+1 = 0 \\ \Leftrightarrow & x = -1. \end{aligned}$$

3) Conclusion :

Attention, ici il est important de vérifier que les solutions appartiennent au domaine de définition de l'équation (car celui-ci n'est pas tout $\mathbb{R}$).

On a $-1 \in D_{(E)}$.

D'où, $S = \{-1\}$

3) Vérification :

$$\frac{-1}{-1+2} + \frac{2}{-1} = -3.$$

Exercice 0.14. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $\frac{x-4}{x+4} = 0$
2. $\frac{x+2}{x+1} + 4 = \frac{5x}{x+2}$

0.3 Inéquations

0.3.1 Inéquations du premier degré

Proposition 0.4 (Inéquations du premier degré)

Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Le réel $ax + b$ est du signe de a lorsque $x \geq \frac{-b}{a}$ et de $-a$ lorsque $x \leq \frac{-b}{a}$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $-a$ 0 signe de a		

Méthode 0.10

Il faut surtout faire attention au signe lorsqu'on divise par un terme négatif.

Exemple : Résoudre l'inéquation (I) : $-3x + 1 \leq 0$.

Solution :

1) Ensemble de définition de (I) :

$$D_{(I)} = \mathbb{R}.$$

2) Résolution :

Soit $x \in D_{(I)}$,

$$\begin{aligned} -3x + 1 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow -3x &\leq -1 \\ \Leftrightarrow x &\geq \frac{-1}{-3} \end{aligned}$$

3) Conclusion :

$$S = D_{(I)} \cap \left[\frac{1}{3}; +\infty \right[= \left[\frac{1}{3}; +\infty \right[.$$

Exercice 0.15. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations $2x + 1 > 0$ et $-6x + 3 < 0$.

0.3.2 Inéquation du second degré

Proposition 0.5 (Inéquation du second degré)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $\Delta > 0$, le nombre réel $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ ailleurs.

Si $\Delta \leq 0$, alors il est toujours du signe de a .

Les tableaux suivants résument le signe de $ax^2 + bx + c$ en fonction de Δ .

$\Delta > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	$-\text{signe de } a$	0	signe de a

$\Delta = 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a

$\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	

Méthode 0.11

Exemple : Résoudre l'inéquation (I) : $-2x^2 - x + 6 \geq 0$

Solution :

1) Ensemble de définition de (I) :

$$D_{(I)} = \mathbb{R}.$$

2) Résolution :

$-2x^2 - x + 6$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$, $b = -1$ et $c = 6$.

Son discriminant Δ vaut :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times (-2) \times 6 = 1 + 48 = 49 > 0.$$

D'où $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$ et $-2x^2 - x + 6$ admet deux racines qui sont

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 7}{-4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 7}{-4} = \frac{6}{4} = -2.$$

D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-2	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$-2x^2 - x + 6$	$-$	0	$+$	0

Attention à ne pas oublier qu'ici on est du signe contraire de $a = -2$ entre les racines, c'est à dire de signe positif.

3) Conclusion :

$$S = D_{(I)} \cap \left[-2; \frac{3}{2}\right] = \left[-2; \frac{3}{2}\right]$$

Exercice 0.16. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $4x + 2 \leq 5x + 3$ et $-x^2 + x + 1 \leq 0$

Méthode 0.12 (Cas particulier d'inéquations de degré deux)

Soit $k \geq 0$.

- $x^2 \leq k \Leftrightarrow -\sqrt{k} \leq x \leq \sqrt{k}$.
- $x^2 \geq k \Leftrightarrow x \geq \sqrt{k} \text{ ou } x \leq -\sqrt{k}$.

La meilleure façon pour le voir est d'en faire la représentation graphique.

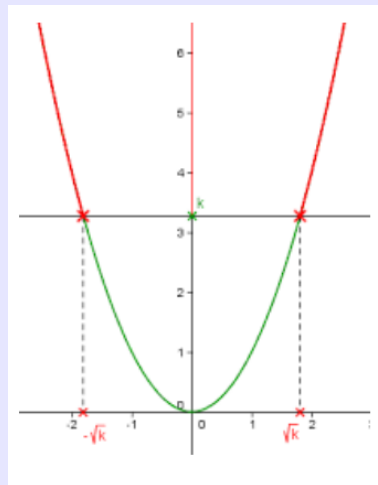


FIGURE 1 – En vert les solutions de l'inéquation $x^2 \leq k$ et en rouge les solutions de l'inéquation $x^2 \geq k$

Exemple : Résoudre l'inéquation (I) : $x^2 \geq 3$.

1) Ensemble de définition de (I) :

$$D_{(I)} = \mathbb{R}.$$

2) Résolution :

Soit $x \in D_{(E)}$.

$$x^2 \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -\sqrt{3} \text{ ou } x \geq \sqrt{3}.$$

3) Conclusion :

$$S =]-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty[.$$

Exercice 0.17. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $x^2 \leq 3$, $x^2 < -2$ et $x^2 - 8 > 0$.

0.3.3 Méthode générale

Méthode 0.13

Lorsqu'une inéquation ne peut se ramener à une inéquation de degré un ou deux, on cherchera à la mettre sous la forme $A(x) \geq 0$ (ou $\leq, >, <$) puis à factoriser $A(x)$. On obtiendra ainsi un produit de facteurs dont on étudiera le signe. On conclura grâce au **tableau de signe**.

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $(2x - 1)(x^2 + 5) \leq 3(2x - 1)^2$.

Solution :

1) Ensemble de définition de (I) :

$D_{(I)} = \mathbb{R}$.

2) Résolution :

On a :

$$\begin{aligned} (2x - 1)(x^2 + 5) &\leq 3(2x - 1)^2 \\ \Leftrightarrow (2x - 1)(x^2 + 5) - 3(2x - 1)^2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (2x - 1)(x^2 + 5 - 3(2x - 1)) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (2x - 1)(x^2 + 5 - 6x + 3) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (2x - 1)(x^2 - 6x + 8) &\leq 0 \end{aligned}$$

On étudie maintenant séparément le signe des deux facteurs.

D'une part, on a $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.

Et d'autre part, $x^2 - 6x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 2] \cup [4; +\infty[$.

En effet, le discriminant de $x^2 - 6x + 8$ vaut

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 8 = 36 - 32 = 4 > 0.$$

D'où, $x^2 - 6x + 8$ admet deux racines qui sont

$$x_1 = \frac{6 + 2}{2} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6 - 2}{2} = 2.$$

Et on conclut quand au signe du trinôme $x^2 - 6x + 8$ utilisant le tableau de signe des trinôme du second degré.

Au final, on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$1/2$	2	4	$+\infty$
$2x - 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 6x + 8$	$+$	$+$	0	$-$	0
$(2x - 1)(x^2 - 6x + 8)$	$-$	0	$+$	0	$+$

3) Solution :

$$S =]-\infty; \frac{1}{2}] \cup [2; 4].$$

Remarque 0.4

Ne surtout pas écrire des choses du type : $(2x - 1)(x^2 - 6x + 8) > 0 \Leftrightarrow 2x - 1 > 0$ ou $x^2 - 6x + 8 > 0$ qui est totalement faux !

Car le "ou" ici autorise que l'un des facteurs soit négatif tant que l'autre est positif.

Or un positif fois un négatif donne un négatif !

De plus, le produit peut être positif parce que les deux facteurs sont négatifs (cas de figure exclu par le "ou" ci-dessus) !

Exercice 0.18.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(2x + 1)(x + 7)(x - 3) \geq 0$
2. $2x(x + 1)^2 < (1 - 3x)(x + 1)^2$

Indication : pour résoudre le 2., il faut tout ramener dans un même membre puis factoriser par $(x + 1)^2$ avant d'étudier le signe des différents facteurs, puis conclure par un tableau de signe.

0.3.4 Inéquations avec des quotients

Méthode 0.14

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $\frac{x}{x+2} + \frac{2}{x} < -3$

Solution :

1) Ensemble de définition de (I) :

Pour que l'équation soit bien définie, il faut que $x+2 \neq 0$ et que $x \neq 0$, c'est à dire $x \neq -2$ et $x \neq 0$ (afin que l'on ne divise pas par 0).

D'où,

$$D_{(I)} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}.$$

2) Résolution de l'équation :

Soit $x \in D_{(I)}$, on regroupe tout d'abord l'ensemble des termes dans un même membre

$$\begin{aligned} & \frac{x}{x+2} + \frac{2}{x} < -3 \\ \Leftrightarrow & \frac{x}{x+2} + \frac{2}{x} + 3 < 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2}{x^2} + \frac{2(x+2)}{x(x+2)} + \frac{3x(x+2)}{x(x+2)} < 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2 + 2(x+2) + 3x(x+2)}{x(x+2)} < 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{4x^2 + 8x + 4}{x(x+2)} < 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{4(x^2 + 2x + 1)}{x(x+2)} < 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{4(x+1)^2}{x(x+2)} < 0 \end{aligned}$$

Ensuite, une fois l'ensemble factorisé, on fait un tableau de signe.

Surtout ne pas écrire $\frac{4(x+1)^2}{x(x+2)} < 0 \Leftrightarrow 4(x+1)^2 < 0$ (car pour cela vous multiplier l'inégalité par $x(x+2)$, or vous ne savez pas si ce terme est positif ou négatif). On écrit donc l'ensemble des facteurs dans le tableau !

On a :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$(x+1)^2$	+		+	0	+
x	-		-	-	0
$x+2$	-	0	+		+
$\frac{4(x+1)^2}{x(x+2)}$	+		-	0	-

D'où $S =]-2, -1[\cup]-1, 0[.$

Attention à bien exclure -1 et 0 .

Exercice 0.19. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

- $\frac{x-4}{x+4} > 0$
- $\frac{x+2}{x+1} + 4 \leq \frac{5x}{x+2}$

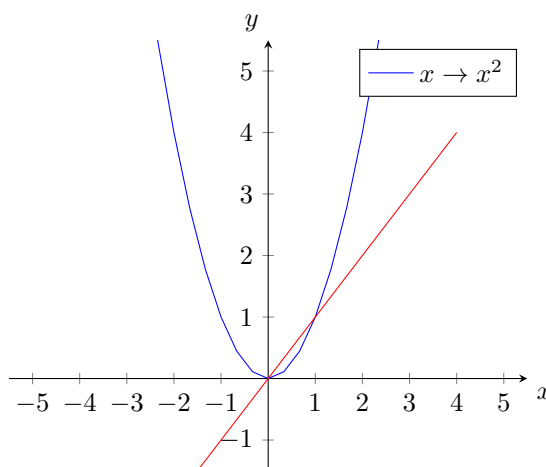
0.4 Fonctions usuelles

Il vous faudra parfaitement connaître le domaine de définition, la représentation graphique et les propriétés de ces fonctions.

0.4.1 Fonction carrée

Définition 0.3

La fonction **carrée** $x \mapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$.

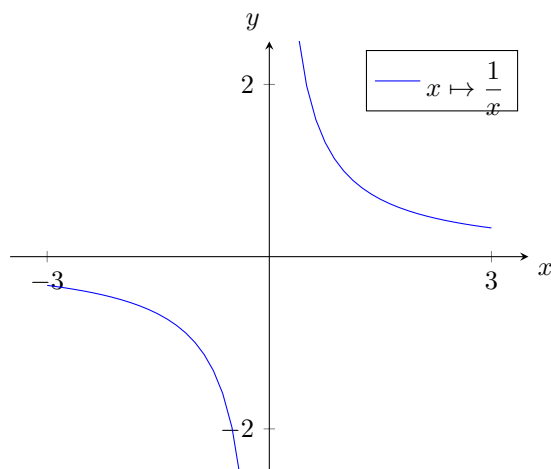
**Propriétés 0.3**

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
2. $\forall x \in [0; 1], x^2 \leq x$.
3. $\forall x \geq 1, x \leq x^2$.

0.4.2 Fonction inverse

Définition 0.4

La fonction **inverse** $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



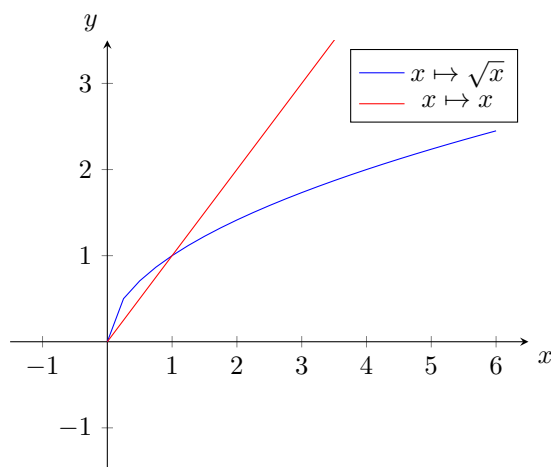
0.4.3 Racine carrée

Définition 0.5

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$.

Proposition 0.6

La fonction **racine carré** $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0, +\infty[$.



Remarque 0.5

1. $\forall x \in [0; 1], \sqrt{x} \geq x$
2. $\forall x \geq 1, x \geq \sqrt{x}$

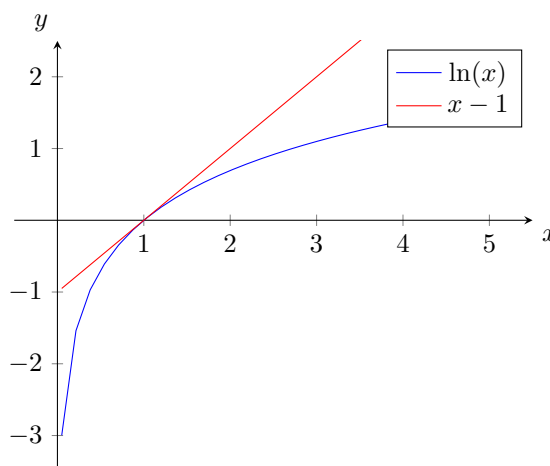
Proposition 0.7

1. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x} \geq 0.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+, (\sqrt{x})^2 = x.$

0.4.4 Logarithme népérien**Définition 0.6**

La fonction logarithme, notée $\ln$, est définie sur $]0, +\infty[$.

Attention, 0 est exclu !

**Proposition 0.8**

1. $\forall x \in]0; 1], \ln(x) \leq 0.$
2. $\forall x \geq 1, \ln(x) \geq 0.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x - 1$ (cf représentation graphique).

Propriétés 0.4 (A connaître parfaitement)

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).$

Conséquences :

- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a).$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \ln(a^n) = n \ln(a).$
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a).$

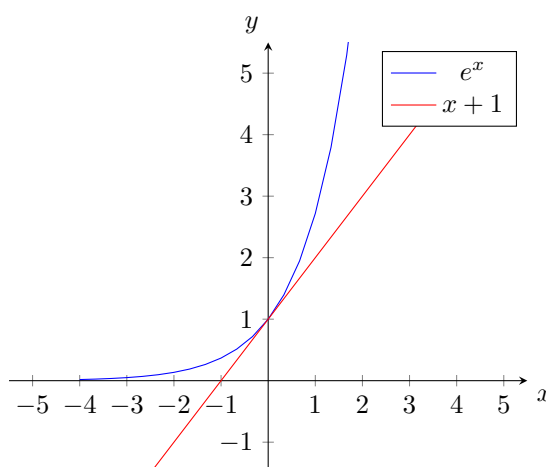
$$\frac{\ln(a)}{\ln(b)} \neq \ln\left(\frac{a}{b}\right) \text{ et } \ln(a+b) \neq \ln(a) + \ln(b).$$

Exemple 0.14. $\ln\left(\frac{192}{108}\right) = \ln\left(\frac{16}{9}\right) = \ln(16) - \ln(9) = \ln(2^4) - \ln(3^2) = 4\ln(2) - 2\ln(3).$

Exercice 0.20. En vous inspirant de l'exemple ci-dessus, simplifier $F = \frac{\ln(16) + \ln(8)}{10\ln(2) + \ln(4)}$ (vous devez trouver une fraction sans logarithme).

0.4.5 Exponentielle

La fonction exponentielle, notée $\exp$, est définie sur $\mathbb{R}$.



Remarque :

$\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e^1 = e \approx 2,718$.

Proposition 0.9

1. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$ (cf représentation graphique).

Proposition 0.10

La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien vu précédemment :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$$

Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad e^{\ln x} = x.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln e^x = x.$$

Propriétés 0.5 (A connaître parfaitement)

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. On a :

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$.
- $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.

Conséquences :

- $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$.
- $\forall n \in \mathbb{Z}, (e^a)^n = e^{an}$.



La somme d'exponentielles n'est pas égale à l'exponentielle de la somme : $e^a + e^b \neq e^{a+b}$. Donner un contre-exemple.

Ce qu'il faut retenir c'est que le logarithme transforme le produit en somme. Et inversement l'exponentielle transforme la somme en produit.

Exercice 0.21. Simplifier $\ln\left(\frac{e^5 \times 12}{e^{-6} \times e^2}\right)$ sous la forme $G = m + n \ln(2) + p \ln(3)$ avec $m, n, p \in \mathbb{Z}$.

Exercice 0.22. Déterminer parmi les assertions suivantes, celles qui sont vraies et celles qui sont fausses. Pour celles qui sont fausses, les corriger de façon à les rendre juste.

- a) $e^{a \times b} = e^a \times e^b$ b) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\ln a}{\ln b}$ c) $b \exp(a) = \exp(a^b)$ d) $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
e) $\ln x$ existe ssi $x \geq 0$ f) $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$ g) $e^a + e^b = e^{a+b}$

0.5 Ensemble de définition

Il est important de savoir donner l'ensemble de définition d'une fonction.

Il faut surtout faire attention à trois points :

1. $\frac{*}{\Delta}$ existe si et seulement si $\Delta \neq 0$
2. $\ln(*)$ existe si et seulement si $* > 0$, car le logarithme est défini sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. $\sqrt{**}$ existe si et seulement si $** \geq 0$, car la racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple 0.15. • $f : x \mapsto \frac{x-1}{x+3}$.

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, x+3 \neq 0\}.$$

Cherchons les valeurs interdites.

On a : $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$.

D'où

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}.$$

- $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$.

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \geq 0\}.$$

On étudie alors le signe du trinôme du second degré $x^2 + x + 1$. Son discriminant vaut $\Delta = -3 < 0$.

D'où $x^2 + x + 1$ est toujours du signe de $a = 1$, c'est à dire positif.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \geq 0$.

D'où

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}.$$

- $f : x \mapsto \ln(x + 4)$.

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, x + 4 > 0\}.$$

Or, $x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -4$.

D'où

$$\mathcal{D}_f =]-4; +\infty[.$$

Exemple 0.16. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

1. $f_1 : x \mapsto \sqrt{\frac{x-3}{2x-1}}$

2. $f_2 : x \mapsto \frac{1}{\ln(2-x^2)}$

Solution :

1.

$$D_{f_1} = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que } 2x-1 \neq 0 \text{ et } \frac{x-3}{2x-1} \geq 0 \right\}$$

afin que $\frac{x-3}{2x-1}$ soit bien défini et que $\sqrt{\frac{x-3}{2x-1}}$ soit bien définie aussi.

- $2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

- Etudions le signe de $\frac{x-3}{2x-1}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$	
$x-3$	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$2x-1$	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$\frac{4(x+1)^2}{x(x+2)}$	$+$	$ $	$-$	0	$+$

D'où,

$$D_{f_1} = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[\cup [3; +\infty[$$

2.

$$D_{f_2} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } 2-x^2 > 0 \text{ et } \ln(2-x^2) \neq 0\}$$

afin que $\ln(2-x^2)$ soit bien défini et la fraction aussi.

- $2-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

- $\ln(2-x^2) = 0 \Leftrightarrow 2-x^2 = e^0 \Leftrightarrow 2-x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$.

D'où

$$D_{f_2} =]-2; -1[\setminus \{-1; 1\} =]-2; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; 2[$$

Exercice 0.23. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes (attention à bien rédiger comme dans les exemples).

1. $f_1 : x \mapsto \sqrt{3x+2}$

2. $f_2 : x \mapsto \ln(x^2 + 2x - 3)$

3. $f_3 : x \mapsto \frac{1}{\ln(x-2)}$

0.6 Dérivations

Le tableau suivant contient les dérivées de fonctions usuelles :

Fonction f	Fonction f'
k	0
$ax + b$	a
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^n	nx^{n-1}
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

Proposition 0.11 (Opérations sur les dérivées)

u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I .

Opération	Fonction	Dérivée
Addition	$u + v$	$u' + v'$
Multiplication par un nombre	$k \times u$ avec $k \in \mathbb{R}$	$k \times u'$
Multiplication	$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
Puissance	u^n	$n \times u' \times u^{n-1}$
Division	$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
Inverse	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
exponentielle	e^u	$u' e^u$
logarithme	$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$

Exemple 0.17. Étudier la dérivabilité de $f : x \mapsto xe^x$.

$$D_f = \mathbb{R}.$$

f est de la forme $u \times v$ avec $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto e^x$ dérivables sur $\mathbb{R}$.

D'où, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (1+x)e^x.$$

On en déduit que $f'(x)$ est du signe de $1+x$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

Or pour tout $x \in]-\infty, -1[$, $1+x < 0$ et pour tout $x \in]-1; +\infty[$, $1+x > 0$.

D'où f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1[$ et strictement croissante sur $]-1; +\infty[$.

Exemple 0.18. Étudier la dérivabilité de $f : x \mapsto \ln(x+1)$.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}, x+1 > 0\} =]-1; +\infty[.$$

f est de la forme $\ln(u)$ avec $u : x \mapsto x+1$ dérivable sur $]-1; +\infty[$.

D'où, f est dérivable sur $]-1; +\infty[$ et, pour tout $x \in]-1; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{x+1}.$$

De manière évidente, $f'(x)$ est du signe de $x + 1$

Or, pour tout $x \in]-1; +\infty[$, $x + 1 > 0$.

D'où pour tout $x \in]-1; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

D'où f est strictement croissante sur $]-1; +\infty[$.

Exercice 0.24. Calculer les dérivées des fonctions f suivantes, après avoir précisé leur ensemble de définition et étudier les variations de ces fonctions .

Attention à bien rédiger comme dans l'exemple.

1. $f : x \mapsto x^3 + x + 3$

2. $f : x \mapsto 3(x^2 + 4)$

3. $f : x \mapsto (-2x + 3)(5x - 3)$

4. $f : x \mapsto \frac{1}{x^3}$

5. $f(x) = (2x - 7)^2$

6. $f : x \mapsto \frac{3x - 4}{x^2 + 3}$

7. $f : x \mapsto \ln(-2x + 5)$

8. $f : x \mapsto \exp(2x + 1)$

