

Devoir de calculs**Mathématiques****6 septembre 2024****Durée : 1 heure**

Les calculatrices, téléphones portables ou tout autre appareil électronique sont **interdits**.

Les réponses aux exercices seront à reporter soigneusement sur le document réponse fourni avec le sujet.

★ ★ ★

Début du sujet

★ ★ ★

Exercice 1. Calculs algébriques

1. Calculer les résultats suivants et les exprimer sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A = \frac{4}{12} - \frac{2}{15};$$

$$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16};$$

$$C = \frac{\frac{2}{6} - \frac{24}{32}}{\frac{10}{12} - \frac{1}{2}}.$$

2. Soit x un réel strictement positif. Écrire les expressions suivantes sous la forme $x^a 2^b$ où a et b sont des entiers relatifs :

$$D = \frac{2^6 \left(\frac{32x^{-2}}{128x^5} \right)^4}{8x^5 - 4x^5};$$

$$E = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \frac{32x^{-7}}{256x^3};$$

$$F = \frac{(8x^4)^{-2}}{(2x^{-12})(128x^4)}.$$

Exercice 2. Exponentielle et logarithme

1. Résoudre les équations suivantes (on précisera l'ensemble dans lequel on résout les équations) :

$$(E_1) : \ln(x) = 2 \ln(1 - \sqrt{2}) + \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln(2)$$

On donnera une expression la plus simple possible pour la solution de l'équation.

$$(E_2) : 5e^x = \frac{3e^{2x} + e^{3x}}{e^x}$$

$$(E_3) : \ln(2x + 3) \geq 2 \ln(x - 1)$$

2. Soient a et b deux réels. Exprimer les quantités suivantes à l'aide de $a, b, \ln(a), \ln(b), \ln(3), \ln(5)$ et de nombres rationnels :

$$A = \frac{\ln(15a)}{\ln(b)} \ln(e^{\ln(\ln(b))})$$

$$B = \ln(2ab) + \ln(e^{b \ln(a)}) - \ln(10b^2)$$

Exercice 3. Trigonométrie

1. Exprimer les expressions suivantes à l'aide de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

$$A = \cos(4x)$$

$$C = \sin(\cos(x)) - \sin\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$B = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$D = \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$$

2. Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$ puis sur $[0, 2\pi]$:

$$(E) : \cos(2x) = \frac{1}{2}$$

$$(F) : \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 4. Calculs de dérivées

Donner l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto x^4 + \frac{x^3}{2} - \frac{2x^2}{5} + 11x - 34$

2. $f_2 : x \mapsto \sqrt{e^x + 1}$

3. $f_3 : x \mapsto \ln(2 + \cos(x))$

4. $f_4 : x \mapsto 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$ (résultat simplifié attendu)

5. $f_5 : x \mapsto 2x \ln(2x) + (3x^2 + 4x)^2$

6. $f_6 : x \mapsto e^{x^2} \cos(2x)$

Exercice 5. Intégrales et primitives

1. Sans justifier leur existence, déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes (on ne demande pas de donner un ensemble sur lequel la fonction admet des primitives) :

$$f_1 : x \mapsto 3x^4 + 3x^2 + x - \frac{1}{x} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f_4 : x \mapsto x^2 \sin(x^3)$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4x+7}}$$

$$f_5 : x \mapsto e^x \cos(e^x)$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{e^{-x}}{3 + e^{-x}}$$

$$f_6 : x \mapsto \sin(2x)e^{\sin(x)^2}$$

2. Calculer les intégrales suivantes (lorsque c'est nécessaire, on pourra faire une intégration par parties) :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cos(x) dx$$

$$I_2 = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2t}}{1 + e^{2t}} dt$$

$$I_3 = \int_0^{\pi} t \sin(t) dt$$

3. Pour tous a et b dans $\mathbb{N}$, on pose $I_{a,b} = \int_0^1 t^a (1-t)^b dt$.

a) Soit a et b dans $\mathbb{N}$. Donner les valeurs de $I_{a,0}$ et $I_{0,b}$.

b) Donner, pour a dans $\mathbb{N}^*$ et b dans $\mathbb{N}$, une relation entre $I_{a,b}$ et $I_{a-1,b+1}$.

Fin du sujet

Correction du devoir de calculs

Correction de l'exercice 1. Calculs algébriques

1. • Si $A = \frac{4}{12} - \frac{2}{15}$ alors $A = \frac{1}{5}$
- Si $B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ alors $B = \frac{15}{16}$
- Si $C = \frac{\frac{2}{12} - \frac{24}{32}}{\frac{10}{12} - \frac{1}{2}}$ alors $C = -\frac{5}{4}$
2. Soit x un réel strictement positif.
- Si $D = \frac{2^6 \left(\frac{32x^{-2}}{128x^5} \right)^4}{8x^5 - 4x^5}$ alors $D = x^{-33}2^{-4}$.
- Si $E = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \frac{32x^{-7}}{256x^3}$ alors $E = x^{-10}2^{-5}$.
- Si $F = \frac{(8x^4)^{-2}}{(2x^{-12})(128x^4)}$ alors $E = x^02^{-14}$.

Correction de l'exercice 2. Exponentielle et logarithme

1. Soit $(E_1) : \ln(x) = 2\ln(\sqrt{2}-1) + \ln(1+\sqrt{2}) - \ln(2)$.

- L'équation (E_1) est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} \ln(x) = 2\ln(\sqrt{2}-1) + \ln(1+\sqrt{2}) - \ln(2) &\iff \ln(x) = \ln\left(\frac{(\sqrt{2}-1)^2(1+\sqrt{2})}{2}\right) \\ &\iff \ln(x) = \ln\left(\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{2}\right) \\ &\iff \ln(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right). \end{aligned}$$

Par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\ln(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) \iff x = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$$\text{L'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ est } \left\{ \frac{\sqrt{2}-1}{2} \right\}.$$

$$\text{Soit } (E_2) : 5e^x = \frac{3e^{2x} + e^{3x}}{e^x}.$$

- L'équation (E_2) est définie sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 5e^x = \frac{3e^{2x} + e^{3x}}{e^x} &\iff 5e^{2x} = 3e^{2x} + e^{3x} \\ &\iff e^{2x}(e^x - 2) = 0 \\ &\iff e^x = 2 \quad (\text{car } e^{2x} \neq 0) \\ &\iff x = \ln(2) \quad (\text{par la stricte croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) \end{aligned}$$

$$\text{L'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ est } \{\ln(2)\}.$$

$$\text{Soit } (E_3) : \ln(2x+3) \geq 2\ln(x-1).$$

- L'ensemble de définition de (E_3) est $]1, +\infty[$.
- Soit $x \in]1, +\infty[$.

$$\ln(2x+3) \geq 2\ln(x-1) \iff \ln(2x+3) \geq \ln(x-1)^2.$$

Par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned}\ln(2x+3) &\geq 2\ln(x-1) &\iff 2x+3 &\geq (x-1)^2 \\ & &\iff x^2 - 4x - 2 &\leq 0 \\ & &\iff (x-2-\sqrt{6})(x-2+\sqrt{6}) &\leq 0 \\ & &\iff x &\in [2-\sqrt{6}, 2+\sqrt{6}]\end{aligned}$$

Notons que $2+\sqrt{6} > 1$ et que $2-\sqrt{6} < 1$ car $2-1 = 1 < \sqrt{6}$.

L'ensemble des solutions de (E_3) est $]1, 2+\sqrt{6}]$.

2. Soient a et b deux réels.

• Si $A = \frac{\ln(15a)}{\ln(b)} e^{\ln(\ln(b))}$ alors $A = \frac{(\ln(3)+\ln(5)+\ln(a)) \ln(\ln(b))}{\ln(b)}$

• Si $B = \ln(2ab) + \ln(e^{b\ln(a)}) - \ln(10b^2)$ alors $B = (b+1)\ln(a) - \ln(b) - \ln(5)$

Correction de l'exercice 3. Trigonométrie

1. • Si $A = \cos(4x)$ alors $A = \cos^2(2x) - \sin^2(2x)$ soit $A = (\cos^2(x) - \sin^2(x))^2 - 4\sin^2(x)\cos^2(x)$.

Comme $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, on obtient $A = (2\cos^2(x) - 1)^2 - 4(1 - \cos^2(x))\cos^2(x)$.

De ce fait, on a $A = 4\cos^4(x) - 4\cos^2(x) + 1 - 4\cos^2(x) + 4\cos^4(x)$.

$$A = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1.$$

• Si $B = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ alors $B = \frac{\sin(x)}{2} - \frac{\sqrt{3}\cos(x)}{2} + \frac{\cos(x)}{2} + \frac{\sqrt{3}\sin(x)}{2}$ soit $B = \frac{1-\sqrt{3}}{2}\cos(x) + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\sin(x)$.

• Si $C = \sin(\cos(x)) - \sin\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ alors $C = \sin(\cos(x)) - \sin(\cos(x))$ d'où $C = 0$.

• Si $D = \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$ la relation $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ donne $D = 2\sin\left(x + \pi\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ soit $D = -\sin(x)$.

2. • Soit $(E) : \cos(2x) = \frac{1}{2}$.

▷ Résolution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos(2x) = \frac{1}{2} &\iff \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &\iff (\exists k \in \mathbb{Z}, 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}, 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi) \\ &\iff (\exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{6} + k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}, x = -\frac{\pi}{6} + k\pi)\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est $\left\{\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

▷ Résolution de (E) sur $[0, 2\pi]$.

★ On cherche les réels de la forme $\frac{\pi}{6} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, qui sont dans $[0, 2\pi]$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{\pi}{6} + k\pi \in [0, 2\pi] \iff k \in \{0, 1\}$$

★ On cherche les réels de la forme $-\frac{\pi}{6} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, qui sont dans $[0, 2\pi]$.

$$-\frac{\pi}{6} + k\pi \in [0, 2\pi] \iff k \in \{1, 2\}$$

L'ensemble des solutions de (E) sur $[0, 2\pi]$ est $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

• Soit $(F) : \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

▷ Résolution de (F) sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par imparité de $\sin$, on trouve :

$$\begin{aligned}\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} &\iff \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ &\iff \left(\exists k \in \mathbb{Z}, x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \text{ ou } \left(\exists k \in \mathbb{Z}, x - \frac{\pi}{3} = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi\right) \\ &\iff \left(\exists k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi\right) \text{ ou } \left(\exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right)\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (F) sur $\mathbb{R}$ est $\left\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ (qui s'écrit aussi $\left\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$).

▷ Résolution de (F) sur $[0, 2\pi]$.

En regardant les solutions de (F) sur $\mathbb{R}$ qui sont aussi dans $[0, 2\pi]$, on trouve

L'ensemble des solutions de (F) sur $[0, 2\pi]$ est $\left\{0, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$.

Correction de l'exercice 4. Calculs de dérivées

1. Soit $f_1 : x \mapsto x^4 + \frac{x^3}{2} - \frac{2x^2}{5} + 11x - 34$.

- En tant que fonction polynomiale, f_1 est définie sur $\mathbb{R}$.

$$f_1' : x \mapsto 4x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{5}x + 11$$

2. Soit $f_2 : x \mapsto \sqrt{e^x + 1}$

- Puisque pour tout x réel, $e^x + 1 \geq 0$, on a que f_2 est définie sur $\mathbb{R}$.

$$f_2' : x \mapsto \frac{e^x}{2\sqrt{e^x + 1}}$$

3. Soit $f_3 : x \mapsto \ln(2 + \cos(x))$

- Pour tout x réel, on a $\cos(x) \geq -1$ donc $2 + \cos(x) > 0$ et de ce fait, f_3 est définie sur $\mathbb{R}$.

$$f_3' : x \mapsto -\frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}$$

4. Soit $f_4 : x \mapsto 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$

- L'ensemble de définition de f_4 est l'ensemble des réels x tels que $x \neq 0$ et $1 + \frac{1}{x} \neq 0$

Notons que pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{x} = 0 &\iff \frac{x+1}{x} = 0 \\ &\iff x = -1 \end{aligned}$$

Ainsi, f_4 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

$$f_4' : x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$$

5. Soit $f_5 : x \mapsto 2x \ln(2x) + (3x^2 + 4x)^2$

- f_5 est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$f_5' : x \mapsto 2 \ln(2x) + 2 + 2(6x + 4)(3x^2 + 4x) \text{ ou encore } f_5' : x \mapsto 2 \ln(2x) + 2 + 2x(6x + 4)(3x + 4)$$

6. Soit $f_6 : x \mapsto e^{x^2} \cos(2x)$

- Par propriétés des fonctions usuelles, f_6 est définie sur $\mathbb{R}$.

$$f_6' : x \mapsto e^{x^2} (-2 \sin(2x) + 2x \cos(2x)) \text{ ou encore } f_6' : x \mapsto 2e^{x^2} (-\sin(2x) + x \cos(2x))$$

Correction de l'exercice 5. Intégrales et primitives

1. Pour tout $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, on note F_i une primitive de f_i .

- Pour $f_1 : x \mapsto 3x^4 + 3x^2 + x - \frac{1}{x} + \frac{1}{(1-x)^2}$, on peut prendre $F_1 : x \mapsto \frac{3}{5}x^5 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \ln(|x|) + \frac{1}{1-x}$

- Pour $f_2 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4x+7}}$, on peut prendre $F_2 : x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{4x+7}$

- Pour $f_3 : x \mapsto \frac{e^{-x}}{3 + e^{-x}}$, on peut prendre $F_3 : x \mapsto -\ln(3 + e^{-x})$.
 - Pour $f_4 : x \mapsto x^2 \sin(x^3)$, on peut prendre $F_4 : x \mapsto -\frac{1}{3} \cos(x^3)$
 - Pour $f_5 : x \mapsto e^x \cos(e^x)$, on peut prendre $F_5 : x \mapsto \sin(e^x)$
 - Pour $f_6 : x \mapsto \sin(2x)e^{\sin(x)^2}$, on note que pour tout x réel, on a $f_6(x) = 2 \sin(x) \cos(x) e^{(\sin(x))^2}$ et par formule de dérivation composée, on peut prendre $F_6 : x \mapsto e^{(\sin(x))^2}$.
2. • Soit $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cos(x) dx$. Alors $I_1 = \left[\frac{\sin^2(x)}{2} \right]_0^{\pi/2}$ soit $I_1 = \frac{1}{2}$
- Soit $I_2 = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2t}}{1 + e^{2t}} dt$. Alors $I_2 = \left[\frac{1}{2} \ln(1 + e^{2t}) \right]_0^{\ln(2)}$ donc $I_2 = \frac{\ln(5) - \ln(2)}{2}$
 - Soit $I_3 = \int_0^{\pi} t \sin(t) dt$.

On pose $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -\cos(t)$ de sorte que u et v soient de classe C^1 sur $[0, \pi]$ et $I_3 = \int_0^{\pi} u(t)v'(t) dt$. Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} I_3 &= [u(t)v(t)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(t)v(t) dt \\ &= \underbrace{[-t \cos(t)]_0^{\pi}}_{=\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi} \cos(t) dt}_{=0} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $I_3 = \pi$.

3. Pour tous a et b dans $\mathbb{N}$, on pose $I_{a,b} = \int_0^1 t^a (1-t)^b dt$.

a) Soit a et b dans $\mathbb{N}$. $I_{a,0} = \frac{1}{a+1}$ et $I_{0,b} = \frac{1}{b+1}$.

b) Supposons a dans $\mathbb{N}^*$ et b dans $\mathbb{N}$.

On pose $u : t \mapsto t^a$ et $v : t \mapsto -\frac{(1-t)^{b+1}}{b+1}$ de sorte que u et v soient de classe C^1 sur $[0, 1]$ et $I_{a,b} = \int_0^1 u(t)v'(t) dt$. Par intégration par parties,

on obtient $I_{a,b} = \underbrace{\left[-\frac{t^a (1-t)^{b+1}}{b+1} \right]_0^1}_{=0} + \int_0^1 a t^{a-1} \frac{(1-t)^{b+1}}{b+1} dt$. On en déduit alors que $I_{a,b} = \frac{a}{b+1} I_{a-1,b+1}$.