

Interrogation de calculs

Mathématiques

8 septembre 2023

Durée : 1 heure

Les calculatrices, téléphones portables ou tout autre appareil électronique sont **interdits**.

Les réponses aux exercices seront à reporter soigneusement sur le document réponse fourni avec le sujet.

Début du sujet

Exercice 1. Fractions, puissances, racines carrées.

1) Effectuer les opérations suivantes et donner le résultat sous forme de fraction irréductible :

$$A = \frac{2}{3} + \frac{3}{2};$$

$$D = 2 \times \frac{3}{7} \times \frac{14}{9};$$

$$B = \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{4};$$

$$E = 4 \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} \right);$$

$$C = 3 - \frac{1}{9} + \frac{1}{3};$$

$$F = 27 \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \right);$$

2) On considère a , b et c des réels non nuls. Simplifier et donner le résultat sous la forme d'un produit ou d'un quotient de puissances à exposants positifs :

$$A = \frac{(ab^{-1})^2}{(a^2b)^{-1}};$$

$$C = \frac{(-a)^5 bc^{-2}}{b^3(-c)^3 a^2};$$

$$B = \frac{(a^2b)^3 c^2}{ab^{-3}};$$

$$D = \frac{(a^2b)^{-3} c^5 a^4}{b^3(-c)^3 a^2}.$$

3) Développer et simplifier :

$$A = (\sqrt{5} - 2)^2;$$

$$B = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2;$$

$$C = \frac{5 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}.$$

Exercice 2. Trigonométrie.

1) On considère x un réel. Exprimer à l'aide de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les expressions suivantes :

$$A = \cos(-x - 100\pi);$$

$$C = \sin\left(-\frac{7\pi}{2} - x\right);$$

$$B = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right);$$

$$D = \cos\left(\frac{9\pi}{6} + x\right).$$

2) Résoudre les équations suivantes :

$$(A) : \sin(x) = \sin(\pi - 3x);$$

$$(B) : \cos(2x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \quad (\text{on pourra utiliser le fait que pour tout } u \text{ réel, } \cos(u + \pi) = -\cos(u)).$$

Exercice 3. Équations du second degré et applications.

1) Déterminer les racines des fonctions polynomiales suivantes :

$$P_1 : x \mapsto 2x^2 + 3x - 2;$$

$$P_2 : x \mapsto 8x^2 - 2x - 1;$$

2) Résoudre les équations suivantes :

$$(A) : \frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} + \frac{2}{x^2-1} = 0;$$

$$(B) : \frac{x^2 + x + 1}{x+1} = \frac{x+5}{x+3}.$$

Exercice 4. Exponentielle et logarithme.

1) Calculer en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ les expressions suivantes :

$$A = \ln(48);$$

$$C = \ln\left(\frac{27}{48}\right);$$

$$B = \ln\left(\frac{1}{18}\right);$$

$$D = \ln(72^3) - \ln(36^2).$$

2) Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \ln\left(\frac{e^{2,5}\sqrt{e^3}}{e^5}\right);$$

$$B = \frac{e^{-2\ln(\sqrt{e})}}{e^{3\ln(e)-5\ln(\sqrt[3]{e^2})}}.$$

3) Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

$$(A) : e^{5x} = e;$$

$$(C) : e^{1-x^2} \leq 1;$$

$$(B) : 5e^{2x} - 4e^x - 1 = 0;$$

$$(D) : e^{1+\ln(x)} \geq 2;$$

Exercice 5. Dérivées.

Sans déterminer l'ensemble de dérivabilité, calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$1) f_1 : x \mapsto x^6 + \sin(x) - \sqrt{x};$$

$$5) f_5 : x \mapsto \sqrt{2x+6};$$

$$2) f_2 : x \mapsto x^3 \left(x - \frac{1}{x}\right);$$

$$6) f_6 : x \mapsto \cos(3x^2);$$

$$3) f_3 : x \mapsto \frac{3}{x - \sqrt{x}};$$

$$7) f_7 : x \mapsto e^{x^2-x};$$

$$4) f_4 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)};$$

$$8) f_8 : x \mapsto \ln(e^x + 1).$$

Exercice 6. Primitives.

Sans justifier leur existence ni leur ensemble de définition, déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

$$1) f_1 : x \mapsto 24x^5 + 20x^4 - 11x^3 + 4x^2 + 3x - 4;$$

$$4) f_4 : x \mapsto -4 \sin(x) \cos^3(x);$$

$$2) f_2 : x \mapsto 3 \cos(x) - \sin(2x);$$

$$5) f_5 : x \mapsto \frac{2}{x^2} e^{\frac{1}{x}};$$

$$3) f_3 : x \mapsto 2x \cos(x^2);$$

$$6) f_6 : x \mapsto \frac{x}{4x^2 + 1}$$

Fin du sujet

Correction de l'interrogation de calculs

Correction de l'exercice 1. Fractions, puissances, racines carrées.

1) • $A = \frac{2}{3} + \frac{3}{2}$ donc $A = \frac{13}{6}$;

• $B = \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{4}$ d'où $B = -\frac{5}{12}$;

• $C = 3 - \frac{1}{9} + \frac{1}{3}$ soit $C = \frac{29}{9}$;

2) • $A = \frac{(ab^{-1})^2}{(a^2b)^{-1}}$ donc $A = \frac{a^4}{b}$;

• $B = \frac{(a^2b)^3c^2}{ab^{-3}}$ d'où $B = a^5b^6c^2$;

3) $A = (\sqrt{5} - 2)^2$ donc $A = 9 - 4\sqrt{5}$;

$B = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$ d'où $B = \frac{13 - 4\sqrt{3}}{9}$;

$C = \frac{5 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$ soit $C = 2\sqrt{2}$.

• $D = 2 \times \frac{3}{7} \times \frac{14}{9}$ donc $D = \frac{4}{3}$;

• $E = 4 \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\right)$ d'où $E = \frac{22}{3}$;

• $F = 27 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right)$ soit $F = \frac{63}{2}$;

• $C = \frac{(-a)^5bc^{-2}}{b^3(-c)^3a^2}$ soit $C = \frac{a^3}{b^2c^5}$;

• $D = \frac{(a^2b)^{-3}c^5a^4}{b^3(-c)^3a^2}$ donc $D = -\frac{c^2}{a^4b^6}$.

Correction de l'exercice 2. Trigonométrie.

1) On considère x un réel.

Si $A = \cos(-x - 100\pi)$, on trouve $A = \cos(x)$.

Pour $B = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$, on obtient $B = -\sin(x)$.

Si $C = \sin\left(-\frac{7\pi}{2} - x\right)$ alors $C = \cos(x)$.

Si $D = \cos\left(\frac{9\pi}{6} + x\right)$, on a $D = \sin(x)$.

2) Résoudre les équations suivantes :

Soit (A) : $\sin(x) = \sin(\pi - 3x)$.

• L'équation (A) est définie sur $\mathbb{R}$.

• Soit x un réel. On note que $\sin(\pi - 3x) = \sin(3x)$ donc

$$\sin(x) = \sin(\pi - 3x) \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(3x)$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, x = 3x + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}, x = \pi - 3x + 2k\pi)$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, x = -k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

L'ensemble des solutions de (A) est $\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Soit (B) : $\cos(2x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$.

• L'équation (B) est définie sur $\mathbb{R}$.

• Soit x un réel.

$$\cos(2x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, 2x = \frac{x}{2} + \pi + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}, 2x = -\frac{x}{2} - \pi + 2k\pi)$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{2\pi}{3} + \frac{4k\pi}{3}) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}, x = -\frac{2\pi}{5} + \frac{4k\pi}{5})$$

L'ensemble des solutions de (B) est $\left\{ \frac{2\pi}{3} + \frac{4k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{2\pi}{5} + \frac{4k\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Correction de l'exercice 3. Équations du second degré et applications.

- 1) • Soit $P_1 : x \mapsto 2x^2 + 3x - 2$. On propose trois méthodes.

▷ *Méthode avec discriminant.* Dans ce cas, le discriminant de P_1 vaut 25 donc les racines de P_1 sont $\frac{-3 \pm 5}{4}$.

▷ *Méthode avec factorisation.* Pour tout x réel, on a $P_1(x) = 2 \left(x^2 + \frac{3}{2}x - 1 \right)$ soit $P_1(x) = 2(x+2) \left(x - \frac{1}{2} \right)$.

Les racines de P_1 sont -2 et $\frac{1}{2}$.

- Soit $P_2 : x \mapsto 8x^2 - 2x - 1$.

Le discriminant de P_2 vaut 36 donc les racines de P_2 sont $\frac{2 \pm 6}{16}$ donc les racines de P_2 sont $-\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$.

- 2) • Soit (A) : $\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} + \frac{2}{x^2-1} = 0$.

▷ L'équation (A) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

▷ Soit x un réel de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} + \frac{2}{x^2-1} = 0 &\Leftrightarrow \frac{x(x-1) - x(x+1) + 2}{x^2-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-2x+2}{x^2-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow -2x+2 = 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ et } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \end{aligned}$$

Ainsi, (A) n'admet pas de solutions.

- Soit (B) : $\frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{x+5}{x+3}$.

▷ L'équation (B) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3, -1\}$.

▷ Soit x un réel de $\mathbb{R} \setminus \{-3, -1\}$.

$$\begin{aligned} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{x+5}{x+3} &\Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x+1} - \frac{x+5}{x+3} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x^2+x+1)(x+3) - (x+5)(x+1)}{(x+1)(x+3)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^3+3x^2-2x-2}{(x+1)(x+3)} = 0 \end{aligned}$$

On note que 1 est une racine évidente du trinôme $X^3 + 3X^2 - 2X - 2$ donc on peut factoriser celui-ci par $X - 1$.

On trouve par identification (c'est-à-dire en cherchant des réels a , b et c tels que $X^3 + 3X^2 - 2X - 2 = (X - 1)(aX^2 + bX + c)$) que $X^3 + 3X^2 - 2X - 2 = (X - 1)(X^2 + 4X + 2)$.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{x+5}{x+3} &\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^2+4x+2)}{(x+1)(x+3)} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2+4x+2) = 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1\} \\ &\Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x^2 + 4x + 2 = 0) \text{ et } x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1\} \end{aligned}$$

Le trinôme $X^2 + 4X + 2 = 0$ ayant un discriminant égal à $8 = (2\sqrt{2})^2$, on trouve que les racines de $X^2 + 4X + 2$ sont $-2 - \sqrt{2}$ et $-2 + \sqrt{2}$.

Par conséquent, on a :

$$\frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{x+5}{x+3} \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -2 - \sqrt{2} \text{ ou } x = -2 + \sqrt{2}) \text{ et } x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1\}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (B) est $\{-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}, 1\}$.

Correction de l'exercice 4. Exponentielle et logarithme.

- 1) • Soit $A = \ln(48)$. On écrit $48 = 2^4 \times 3$ donc $\ln(48) = \ln(2^4) + \ln(3)$ soit $A = 4\ln(2) + \ln(3)$.
- Soit $B = \ln\left(\frac{1}{18}\right)$. Alors $B = -\ln(18)$ et comme $18 = 2 \times 3^2$, on trouve $B = -\ln(2) - 2\ln(3)$.
- Soit $C = \ln\left(\frac{27}{48}\right)$. On a alors $\frac{27}{48} = \frac{3^2}{2^4}$ donc $C = 2\ln(3) - 4\ln(2)$.
- Soit $D = \ln(72^3) - \ln(36^2)$. On écrit $72^3 = (2^3 \times 3^2)^3$ et $36^2 = (2^2 \times 3^2)^2$ d'où $72^3 = 2^9 \times 3^6$ et $36^2 = 2^4 \times 3^4$ donc $D = 9\ln(2) + 6\ln(3) - 4\ln(2) - 4\ln(3)$ soit $D = 5\ln(2) + 2\ln(3)$.

- 2) • Soit $A = \ln\left(\frac{e^{2,5}\sqrt{e^3}}{e^5}\right)$. On note que $\frac{e^{2,5}\sqrt{e^3}}{e^5} = \frac{1}{e}$ d'où $A = -1$.

• Soit $B = \frac{e^{-2\ln(\sqrt{e})}}{e^{3\ln(e) - 5\ln(\sqrt[3]{e^2})}}$.

On observe que $-2\ln(\sqrt{e}) = -1$ et $3\ln(e) - 5\ln(\sqrt[3]{e^2}) = -\frac{1}{3}$ donc $B = e^{-2/3}$.

- 3) • Soit $(A) : e^{5x} = e$.

▷ L'équation (A) est définie sur $\mathbb{R}$.

▷ Soit x un réel. Comme $e = e^1$ et que $\exp$ est injective (car strictement croissante sur $\mathbb{R}$), on a :

$$\begin{aligned} e^{5x} = e^1 &\Leftrightarrow 5x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (A) est $\left\{\frac{1}{5}\right\}$.

- Soit $(B) : 5e^{2x} - 4e^x - 1 = 0$.

▷ L'équation (B) est définie sur $\mathbb{R}$.

▷ On s'intéresse dans un premier temps à l'équation $(B') : 5X^2 - 4X - 1 = 0$ (on pense à effectuer le changement d'inconnue $X = e^x$ dans l'équation (B)).

En utilisant les relations entre racines et coefficients d'un trinôme (ou la factorisation $5X^2 - 4X - 1 = (5X + 1)(X - 1)$), on trouve que 1 et $-\frac{1}{5}$ sont les solutions de (B') .

▷ Maintenant, résolvons (B) .

Soit x un réel. D'après la résolution de (B') , on a :

$$\begin{aligned} 5e^{2x} - 4e^x - 1 = 0 &\Leftrightarrow 5(e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = 1 \text{ ou } e^x = -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Le cas où $e^x = -\frac{1}{5}$ étant impossible (par stricte positivité de la fonction $\exp$), on en déduit que :

$$\begin{aligned} 5e^{2x} - 4e^x - 1 = 0 &\Leftrightarrow 5(e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

car $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $e^0 = 1$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de (B) est $\{0\}$.

- Soit $(C) : e^{1-x^2} \leq 1$.

▷ L'inéquation (C) est définie sur $\mathbb{R}$.

▷ Soit x un réel. La fonction $\exp$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} e^{1-x^2} \leq 1 &\Leftrightarrow e^{1-x^2} \leq e^0 \\ &\Leftrightarrow 1 - x^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 \geq 1 \\ &\Leftrightarrow |x| \geq 1 \\ &\Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\end{aligned}$$

- Soit $(D) : e^{1+\ln(x)} \geq 2$.
 $\triangleright$ L'inéquation (D) est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
 $\triangleright$ Soit x un réel strictement positif.

$$\begin{aligned} e^{1+\ln(x)} \geq 2 &\Leftrightarrow ex \geq 2 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (D) est $\left[2e^{-1}, +\infty[.$

Correction de l'exercice 5. Dérivées.

1) Soit $f_1 : x \mapsto x^6 + \sin(x) - \sqrt{x}$.

- f_1 est définie sur $\mathbb{R}_+.$
- Par opérations algébriques sur les fonctions dérivables, f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*.$
 De plus, f_1 n'est pas dérivable en 0 car si c'était le cas, par opérations, la fonction $\sqrt{\cdot}$ serait dérivable en 0 ce qui est absurde. Ainsi,
 l'ensemble de dérivabilité de f_1 est $\mathbb{R}_+^*.$

• On trouve $f_1' : x \mapsto 6x^5 + \cos(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

2) Soit $f_2 : x \mapsto x^3 \left(x - \frac{1}{x}\right).$

- f_2 est définie sur $\mathbb{R}^*.$
- Par opérations algébriques, f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}^* : \text{l'ensemble de dérivabilité de } f_2 \text{ est } \mathbb{R}^*.$
- On note que pour tout x réel non nul, $f_2(x) = x^4 - x^2$ donc $f_2' : x \mapsto 4x^3 - 2x.$

3) Soit $f_3 : x \mapsto \frac{3}{x - \sqrt{x}}.$

- f_3 est définie sur l'ensemble des réels x tels que $x \geq 0$ et $x - \sqrt{x} \neq 0$.
 Pour cela, nous nous intéressons à l'équation $x - \sqrt{x} = 0$ d'inconnue x réelle positive.
 Soit x un réel positif. On a

$$\begin{aligned} x - \sqrt{x} = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \text{ ou } \sqrt{x} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, f_3 est définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[.$

- Par opérations algébriques, f_3 est dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[: \text{l'ensemble de dérivabilité de } f_3 \text{ est }]0, 1[\cup]1, +\infty[.$

• De plus, on a $f_3' : x \mapsto -3 \times \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(x - \sqrt{x})^2}$ ou encore $f_3' : x \mapsto \frac{3(1 - 2\sqrt{x})}{2(\sqrt{x} - 1)^2 x^{3/2}}.$

4) Soit $f_4 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{2 + \cos(x)}.$

- f_4 est définie sur l'ensemble des réels x tels que $2 + \cos(x) \neq 0$ (ce qui est vrai pour tout x réel car $\cos(x) \geq -1$ et de ce fait, $2 + \cos(x) \geq 1$).
- Par opérations algébriques, f_4 est dérivable sur $\mathbb{R} : \text{l'ensemble de dérivabilité de } f_4 \text{ est } \mathbb{R}.$
- De plus, on trouve $f_4' : x \mapsto \frac{\cos(x)(2 + \cos(x)) + \sin^2(x)}{(2 + \cos(x))^2}$ soit $f_4' : x \mapsto \frac{2\cos(x) + 1}{(2 + \cos(x))^2}.$

5) Soit $f_5 : x \mapsto \sqrt{2x + 6}.$

- f_5 est définie sur l'ensemble des réels x tels que $2x + 6 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq -3$. Ainsi, f_5 est définie sur $[-3, +\infty[.$
- Notons $f_5 = \sqrt{\cdot} \circ h$ où $h : x \mapsto 2x + 6$. Comme pour tout x de $] -3, +\infty[$, $h(x) > 0$, on trouve par composition de fonctions dérivables que f_5 est dérivable sur $] -3, +\infty[.$
 De plus, f_5 n'est pas dérivable en -3 : en effet, on note que h est bijective de réciproque $h^{-1} : t \mapsto \frac{t-6}{2}$ et en écrivant $f_5 \circ h^{-1} = \sqrt{\cdot}$, si f_5 était dérivable en -3 , comme $h^{-1}(0) = -3$, on obtiendrait par composition de fonctions dérivables que $\sqrt{\cdot}$ serait dérivable en 0 ce qui est absurde.

L'ensemble de dérivabilité de f_5 est $] -3, +\infty[.$

- On trouve aussi $f'_5 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x+6}}$.

6) Soit $f_6 : x \mapsto \cos(3x^2)$.

- f_6 est définie sur $\mathbb{R}$.
- Par composition de fonctions dérivables, f_6 est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc l'ensemble de dérivabilité de f_6 est $\mathbb{R}$.
- On obtient $f'_6 : x \mapsto -6x \sin(3x^2)$.

7) Soit $f_7 : x \mapsto e^{x^2-x}$.

- f_7 est définie sur $\mathbb{R}$.
- Par composition de fonctions dérivables, f_7 est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc l'ensemble de dérivabilité de f_7 est $\mathbb{R}$.
- On obtient $f'_7 : x \mapsto (2x-1)e^{x^2-x}$.

8) Soit $f_8 : x \mapsto \ln(e^x + 1)$.

- f_8 est définie sur l'ensemble des réels x tels que $e^x + 1 > 0$ ce qui est vrai pour tous les réels x puisque $e^x > 0$. Ainsi, f_8 est définie sur $\mathbb{R}$.
- Par composition de fonctions dérivables, f_8 est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc l'ensemble de dérivabilité de f_8 est $\mathbb{R}$.
- On obtient $f'_8 : x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$.

Correction de l'exercice 6. Primitives.

Pour tout k de $\llbracket 1, 8 \rrbracket$, on notera F_k une primitive de la fonction f_k .

1) Soit $f_1 : x \mapsto 24x^5 + 20x^4 - 11x^3 + 4x^2 + 3x - 4$.

On prend par exemple $F_1 : x \mapsto 4x^6 + 4x^5 - \frac{11}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + 365$.

2) Soit $f_2 : x \mapsto 3\cos(x) - \sin(2x)$.

Prenons $F_2 : x \mapsto 3\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + 17$.

3) Soit $f_3 : x \mapsto 2x\cos(x^2)$.

Choisissons $F_3 : x \mapsto \sin(x^2) + e^\pi$.

4) Soit $f_4 : x \mapsto -4\sin(x)\cos^3(x)$;

On prend $F_4 : x \mapsto \cos^4(x) + \pi^{365}$.

5) Soit $f_5 : x \mapsto \frac{2}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

On choisit $F_5 : x \mapsto -2e^{\frac{1}{x}} + 42$.

6) Soit $f_6 : x \mapsto \frac{x}{4x^2+1}$.

Et pourquoi pas $F_6 : x \mapsto \frac{1}{8}\ln(4x^2+1) - 42$?