

Devoir de calculs**5 septembre 2025****Durée : 1 heure**

Les calculatrices, téléphones portables ou tout autre appareil électronique sont interdits.

Les réponses aux exercices seront à reporter soigneusement sur le document réponse fourni avec le sujet.

★ ★ ★

Début du sujet

★ ★ ★

Exercice 1. Calculs algébriques

1. Calculer les résultats suivants et les exprimer sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A = \frac{2}{11} - \frac{1}{7}$$

$$B = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - 3$$

$$C = \frac{4}{5} \times \frac{25}{16} - \frac{3}{7}$$

$$D = \frac{4 + \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}$$

2. Factoriser chacune de ces expressions sous la forme $(a - b) \times$ (expression polynomiale en a et b) :

$$E = a^3 - b^3$$

$$F = a^3 - ab^2 - ab + b^2$$

3. Soit x un réel non nul. Écrire sous la forme $x^a 2^b$ où a et b sont des entiers relatifs :

$$G = \frac{64x^{-23}}{(16^{-2}x^4)^2}$$

$$H = \frac{2^{11} \left(\frac{2x^4}{32x-5} \right)^{-4}}{128x^{-4} - (8x^{-2})^2}$$

Exercice 2. Exponentielle et logarithme

1. Soit x un réel strictement positif. Exprimer les quantités suivantes en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(x)$.

$$A = \ln(12x^4)$$

$$C = \ln(18x^{-2}) - 3\ln(4x)$$

$$B = \ln(6x) - \ln(x^6)$$

$$D = \ln\left(\frac{24x^{-2}}{27x^5}\right) + 11\ln(12x)$$

2. Exprimer les quantités suivantes sans exponentielle ou logarithme :

$$E = e^{3\ln(2)}$$

$$G = e^{-2\ln(\ln(e^7))}$$

$$F = -3\ln(e^{-4})$$

$$H = \frac{e^{\frac{1}{3}\ln(125)} e^{\frac{1}{2}\ln(9)}}{e^{\frac{1}{4}\ln(16)}}$$

3. Résoudre les équations suivantes (*indication* : on pourra poser $X = e^x$) :

$$(E) : e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$$

$$(F) : e^{2x} - 4e^x - 5 = 0$$

4. Résoudre les équations ou inéquations suivantes, en précisant l'ensemble dans lequel on résout les équations :

$$(G) : \ln(2x - 3) = \ln(4x + 1)$$

$$(I) : \ln(2x - 4) \geq \ln(5 - x)$$

$$(H) : 2e^{2x+1} = \frac{3}{e^{x-2}}$$

$$(J) : e^{x-3} \geq 2e^{3x+2}$$

Exercice 3. Trigonométrie

1. Soit x un réel. Exprimer les expressions suivantes à l'aide de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

$$A = \cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$C = \sin(-x + \pi) + \cos(2x)$$

$$B = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$D = \cos(3x)$$

2. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x dans $\mathbb{R}$:

$$(E) : \cos(x) = \frac{3}{2}$$

$$(F) : \sin(2x) = -\frac{1}{2}$$

$$(G) : \cos(x) = \sin(x)$$

Exercice 4. Calculs de dérivées.

Donner l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

$$1. f_1 : x \mapsto e^x + \cos(2x) - \sin(x)$$

$$3. f_3 : x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$$

$$2. f_2 : x \mapsto \sin(e^x)$$

$$4. f_4 : x \mapsto \frac{e^x}{\cos(x)}$$

Exercice 5. Primitives.

Sans justifier leur existence, déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes (on ne demande pas de donner un ensemble sur lequel la fonction admet des primitives) :

$$1. f_1 : x \mapsto 2x^5 - x^4 + 11x^3 - 7x + 31$$

$$3. f_3 : x \mapsto 4x^2 \cos(x^3)$$

$$2. f_2 : x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$4. f_4 : x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$$

Exercice 6. Intégrales.

Calculer les intégrales suivantes (on pourra, lorsque c'est nécessaire, effectuer une intégration par parties) :

$$1. A = \int_0^{\pi/4} \cos(2x) dx$$

$$3. C = \int_0^1 x e^{-x^2} dx$$

$$2. B = \int_0^1 \frac{dx}{x+2}$$

$$4. D = \int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx$$

Fin du sujet

Correction de l'interrogation de calculs

Exercice 1. Calculs algébriques

$$1. \quad A = \frac{3}{77} \qquad B = -\frac{31}{12} \qquad C = \frac{23}{28} \qquad D = \frac{260}{3}$$

$$2. \quad E = (a-b)(a^2+ab+b^2) \qquad F = (a-b)(a^2+ab-b)$$

3. Soit x un réel non nul.

$$G = x^{-31}2^{22} \qquad H = x^{-32}2^{21}$$

Exercice 2. Exponentielle et logarithme

1. Soit x un réel strictement positif.

$$\begin{aligned} A &= 2\ln(2) + \ln(3) + 4\ln(x) & C &= -5\ln(2) + 2\ln(3) - 5\ln(x) \\ B &= \ln(2) + \ln(3) - 5\ln(x) & D &= 25\ln(2) + 9\ln(3) + 4\ln(x) \end{aligned}$$

$$2. \quad E = 8 \qquad F = 12 \qquad G = \frac{1}{49} \qquad H = \frac{15}{2}$$

3. • Soit $(E) : e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$.

▷ L'équation (E) est définie sur $\mathbb{R}$.

▷ Soit x un réel. On sait que pour tout X de $\mathbb{R}$, on a $X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$ donc pour $X = e^x$, on trouve :

$$\begin{aligned} e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 &\iff (e^x - 2)(e^x - 3) = 0 \\ &\iff e^x = 2 \quad \text{ou} \quad e^x = 3 \\ &\iff x = \ln(2) \quad \text{ou} \quad x = \ln(3) \quad (\text{par stricte croissance de exp sur } \mathbb{R}) \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) est $\{\ln(2), \ln(3)\}$.

• Soit $(F) : e^{2x} - 4e^x - 5 = 0$.

▷ L'équation (F) est définie sur $\mathbb{R}$.

▷ Soit x un réel. On sait que pour tout X de $\mathbb{R}$, on a $X^2 - 4X - 5 = (X+1)(X-5)$ donc pour $X = e^x$, on trouve :

$$\begin{aligned} e^{2x} - 4e^x - 5 = 0 &\iff (e^x + 1)(e^x - 5) = 0 \\ &\iff e^x - 5 = 0 \quad (\text{car } e^x + 1 > 0 \text{ puisque } e^x > 0) \\ &\iff x = \ln(5) \quad (\text{par stricte croissance de exp sur } \mathbb{R}) \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (F) est $\{\ln(5)\}$.

4. • Soit $(G) : \ln(2x-3) = \ln(4x+1)$

• (G) est définie sur $\{x \in \mathbb{R} : 2x-3 \text{ et } 4x+1 > 0\}$ donc (G) est définie sur $]3/2, +\infty[$.

- Soit x un réel de $]3/2, +\infty[$. Par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned}\ln(2x-3) = \ln(4x+1) &\iff 2x-3 = 4x+1 \\ &\iff x = -2\end{aligned}$$

Or, -2 n'appartient pas à $]3/2, +\infty[$ donc (G) n'a pas de solution.

L'ensemble des solutions de (G) est $\emptyset$.

- Soit $(H) : 2e^{2x+1} = \frac{3}{e^{x-2}}$

▷ L'équation (H) est définie sur $\mathbb{R}$.

▷ Soit x un réel.

$$\begin{aligned}2e^{2x+1} = \frac{3}{e^{x-2}} &\iff e^{3x-1} = \frac{3}{2} \\ &\iff 3x-1 = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \\ &\iff x = \frac{\ln(3) - \ln(2) + 1}{3}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (H) est $\left\{\frac{\ln(3) - \ln(2) + 1}{3}\right\}$.

- Soit $(I) : \ln(2x-4) \geq \ln(5-x)$

▷ L'inéquation (I) est définie sur $\{x \in \mathbb{R} : 2x-4 > 0 \text{ et } 5-x\}$ donc (I) est définie sur $]2, 5[$.

▷ Soit x un réel de $]2, 5[$.

Par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned}\ln(2x-4) \geq \ln(5-x) &\iff 2x-4 \geq 5-x \\ &\iff x \geq 3\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (I) est $[3, 5[$.

- Soit $(J) : e^{x-3} \geq 2e^{3x+2}$.

▷ L'inéquation (J) est définie sur $\mathbb{R}$.

▷ Soit x un réel.

Par stricte croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}e^{x-3} \geq 2e^{3x+2} &\iff e^{2x+5} \leq \frac{1}{2} \\ &\iff 2x+5 \leq -\ln(2) \\ &\iff x \leq \frac{-\ln(2) - 5}{2}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (J) est $\left\{\frac{-\ln(2) - 5}{2}\right\}$.

Exercice 3. Trigonométrie

1. Soit x un réel.

$$A = \frac{1}{2} \cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x)$$

$$B = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cos(x) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \sin(x).$$

$$C = \cos^2(x) - \sin^2(x) + \sin(x)$$

$$D = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) \text{ ou } D = 4\cos^3(x) - 3\cos(x).$$

2. • Soit $(E) : \cos(x) = \frac{3}{2}$

▷ L'équation (E) est définie sur $\mathbb{R}$.

▷ Montrons que (E) n'a pas de solution.

Raisonnons par l'absurde : supposer disposer de x une solution x de (E) .

Dans ce cas, $\cos(x) = \frac{3}{2}$ mais comme $\cos(x) \leq 1$, on trouve $\frac{3}{2} \leq 1$ ce qui est absurde.

L'ensemble des solutions de (E) est $\emptyset$.

- Soit $(F) : \sin(2x) = -\frac{1}{2}$

▷ L'équation (F) est définie sur $\mathbb{R}$.

▷ Soit x un réel.

$$\begin{aligned} \sin(2x) = -\frac{1}{2} &\iff \sin(2x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ &\iff \left(\exists k \in \mathbb{Z}, \quad 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) \text{ ou } \left(\exists \ell \in \mathbb{Z}, \quad 2x = \frac{7\pi}{6} + 2\ell\pi\right) \\ &\iff \left(\exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = -\frac{\pi}{12} + k\pi\right) \text{ ou } \left(\exists \ell \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{7\pi}{12} + \ell\pi\right) \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (F) est $\left\{-\frac{\pi}{12} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{12} + \ell\pi \mid \ell \in \mathbb{Z}\right\}$.

- Soit $(G) : \cos(x) = \sin(x)$

▷ L'équation (G) est définie sur $\mathbb{R}$.

▷ Soit x un réel.

On sait que pour tout θ de $\mathbb{R}$, on a $\sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ donc pour $\theta = x$, on trouve :

$$\begin{aligned} \cos(x) = \sin(x) &\iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &\iff \left(\exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi\right) \text{ ou } \left(\exists \ell \in \mathbb{Z}, \quad x = x - \frac{\pi}{2} + 2\ell\pi\right) \\ &\iff \left(\exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right) \text{ ou } \underbrace{\left(\exists \ell \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{2} = 2\ell\pi\right)}_{\text{impossible sinon } \frac{1}{2} \text{ serait entier}} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (G) est $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 4. Calculs de dérivées.

1. Si $f_1 : x \mapsto e^x + \cos(2x) - \sin(x)$ alors $D_{f_1} = \mathbb{R}$ et $f'_1 : x \mapsto e^x - 2\sin(2x) - \cos(x)$.

2. Si $f_2 : x \mapsto \sin(e^x)$ alors $D_{f_2} = \mathbb{R}$ et $f'_2 : x \mapsto e^x \cos(e^x)$.

3. Si $f_3 : x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$ alors $D_{f_3} =]1, +\infty[$ et $f'_3 : x \mapsto \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}$.

4. Si $f_4 : x \mapsto \frac{e^x}{\cos(x)}$ alors $D_{f_4} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ et $f'_4 : x \mapsto \frac{e^x(\cos(x) + \sin(x))}{\cos^2(x)}$

Exercice 5. Primitives.

1. Si $f_1 : x \mapsto 2x^5 - x^4 + 11x^3 - 7x + 31$ alors on peut prendre $F_1 : x \mapsto \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{11}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2 + 31x + \pi$

2. Si $f_2 : x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$ alors on peut prendre $F_2 : x \mapsto -\frac{1}{x+1} + e$

3. Si $f_3 : x \mapsto 4x^2 \cos(x^3)$ alors on peut prendre $F_3 : x \mapsto \frac{4}{3} \sin(x^3) + \sqrt{2}$
4. Si $f_4 : x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$ alors on peut prendre $F_4 : x \mapsto 2\sqrt{\ln(x)} + \pi^e$

Exercice 6. Intégrales.

1. Si $A = \int_0^{\pi/4} \cos(2x) dx$ alors $A = \left[\frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^{\pi/4}$ soit $A = \frac{1}{2}$.
2. Si $B = \int_0^1 \frac{dx}{x+2}$ alors $B = [\ln(x+2)]_0^1$ donc $B = \ln(3) - \ln(2)$.
3. Si $C = \int_0^1 x e^{-x^2} dx$ alors $C = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^1$ donc $C = \frac{1 - e^{-1}}{2}$.
4. Soit $D = \int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx$.

On pose $u : x \mapsto -\cos(x)$ et $v : x \mapsto x$ de sorte que u et v soient de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$ et $D = \int_0^{\pi/2} u'(x)v(x) dx$.

Par intégration par parties, on a $D = [u(x)v(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u(x)v'(x) dx$ soit $D = \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx$ soit $D = [\sin(x)]_0^{\pi/2}$ donc $D = 1$.