

CPGE ECG
Mathématiques approfondies

Cahier de calculs

Correction des exercices

Contact : robert.thai@gmx.fr

Table des matières

1	Calculs sur les réels	2
1.1	Correction des exercices sur les réels	2
2	Résolutions d'équations et inéquations	5
2.1	Correction des exercices sur les équations	5
2.2	Correction sur les exercices sur les inéquations	12
3	Calculs sur les fonctions	16
3.1	Correction des exercices sur logarithmes et exponentielle	16
3.2	Correction des exercices sur la trigonométrie	18
3.3	Correction sur les exercices sur la dérivation	22
3.4	Correction des exercices sur les primitives	24
3.5	Correction des exercices sur le calcul intégral	25

1 Calculs sur les réels

1.1 Correction des exercices sur les réels

Correction de l'exercice 1. Fractions sous forme irréductible.

1) $A = \frac{3}{2}$

4) $D = \frac{1}{12}$

7) $G = \frac{3}{2}$

10) $J = \frac{649}{1000}$

2) $B = \frac{3}{7}$

5) $E = \frac{3}{16}$

8) $H = \frac{64}{421}$

3) $C = \frac{7}{12}$

6) $F = \frac{9}{7}$

9) $I = -\frac{809}{105}$

Correction de l'exercice 2. Calculs et puissances.

1) $A = \frac{1}{ab}$

3) $C = \frac{1}{ac^9}$

5) $E = \frac{b^8 c^9}{a^4}$

2) $B = \frac{c^3}{ab}$

4) $D = \frac{1}{ab^6 c^3}$

6) $F = -\frac{1}{a^7}$

Correction de l'exercice 3. Autour des identités remarquables.

1) Soit x et y deux réels.

a) $A = x^2 + 2x + 1$

f) $F = 4x^2 - 4xy + y^2$

j) $J = 16x^2 - 4xy + \frac{y^2}{4}$

b) $B = x^2 - 2x + 1$

g) $G = 9x^2 + 24xy + 16y^2$

k) $K = \frac{x^2 + 4xy + 4y^2}{9}$

c) $C = 4x^2 + 4x + 1$

h) $H = 49x^2 - 28xy + 4y^2$

l) $L = \frac{x^2 - 6xy + 9y^2}{25}$

d) $D = 9x^2 - 12x + 4$

i) $I = \frac{x^2}{4} + xy + y^2$

e) $E = x^2 - 2x + 1$

2) Soit x et y deux réels.

a) $A = (x - 2)(x + 2)$

e) $E = 3(2x + 1)$

i) $I = 4xy$

b) $B = (4 - x)(4 + x)$

f) $F = (x - 4)(3x + 2)$

j) $J = 3y(4x - y)$

c) $C = 4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$

g) $G = 5x(-x + 6)$

k) $K = (-8x + 3y)(-2x + 7y)$

d) $D = (\sqrt{2}x - 5)(\sqrt{2}x + 5)$

h) $H = (-3x + 1)(7x + 11)$

l) $L = -20x(3x + 4y)$

Correction de l'exercice 4. Un cas particulier de la formule de Bernoulli.

1) Soit a et b deux réels.

a) Montrons que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

On développe le membre de droite :

$$\begin{aligned}(a - b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - b^3.\end{aligned}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

b) On écrit $a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2$ et comme $(a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$, on trouve $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$.

Puisque $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, on en déduit que $a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$.

On développe $(a + b)(a^2 + b^2)$ et on trouve $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ d'où $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$.

2) Soit x et y deux réels.

a) En utilisant la question 1.a) pour $a = x$ et $b = 1$, on trouve : $A = (x-1)(x^2+x+1)$

b) En utilisant la question 1.a) pour $a = 2$ et $b = x$, on trouve : $B = (2-x)(4+2x+x^2)$

c) Comme $C = (5x)^3 - 1$, on applique 1.a) pour $a = 5x$ et $b = 1$ et on trouve : $C = (5x-1)(25x^2+5x+1)$

d) On écrit $D = \frac{x^3-8}{8}$ puis on applique 1.a) pour $a = x$ et $b = 1$ et on trouve $D = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{8}$.

e) On écrit $E = x^3 - (-2y)^3$ puis on applique 1.a) et on trouve $E = (x+2y)(x^2-4xy+4y^2)$

f) De même, on écrit $F = (xy)^3 - (-1)^3$ et d'après 1.a), on obtient $F = (xy+1)(x^2y^2-xy+1)$

g) On applique 1.b) pour $a = xy$ et $b = 1$ et on trouve $G = (xy-1)(x^3y^3+x^2y^2+xy+1)$

h) On écrit $H = (2x)^4 - (y^2)^4$ et on applique 1.b) pour $a = 2x$ et $b = y^2$ puis on trouve $H = (2x-y^2)(8x^3+4x^2y^2+2xy^4+y^6)$

Correction de l'exercice 5. Racines carrées.

1) a) $A = 3\sqrt{2}$

d) $D = 7\sqrt{2}$

g) $G = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

i) $I = \frac{11}{6}\sqrt{2}$

b) $B = 2\sqrt{6}$

e) $E = -3\sqrt{3}$

h) $H = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

j) $J = -\frac{23}{20}\sqrt{3}$

c) $C = 4\sqrt{2}$

f) $F = \frac{2}{3}\sqrt{7}$

2) a) $A = 3 + 2\sqrt{2}$

g) $G = 2$

b) $B = 4 - 2\sqrt{3}$

h) $H = \sqrt{2} - 1$

c) $C = 7 - 2\sqrt{10}$

d) $D = -2$

i) $I = \frac{5+3\sqrt{3}}{2}$

e) $E = 47$

f) $F = \frac{\sqrt{35}}{3}$

j) $J = \frac{9-11\sqrt{2}}{7}$

Correction de l'exercice 6. Inégalités.

1) Soit x un réel compris entre 0 et 2.

a) Encadrons $|x+3|$.

Puisque $0 \leq x \leq 2$, on a par somme d'inégalités que $3 \leq x+3 \leq 5$.

En particulier, $x+3 \geq 0$ donc $|x+3| = x+3$ d'où $3 \leq |x+3| \leq 5$.

b) Encadrons $3x-7$.

La fonction $f : t \mapsto 3t-7$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,2]$ d'où $f(0) \leq f(x) \leq f(2)$.

Or, $f(x) = 3x-7$, $f(0) = -7$ et $f(2) = -1$ d'où $-7 \leq 3x-7 \leq -1$.

c) Encadrons $-4x+5$.

La fonction $g : t \mapsto -4t+5$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,2]$ d'où $g(2) \leq g(x) \leq g(0)$.

Or, $g(2) = -3$ et $g(0) = 5$ donc $-3 \leq -4x+5 \leq 5$.

d) Encadrons $\frac{1}{x^2+1}$.

On sait que $0 \leq x \leq 2$ donc par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a $0 \leq x^2 \leq 4$ d'où $1 \leq x^2+1 \leq 5$.

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ (et donc sur $[1,5]$), on obtient $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 1$.

2) Preuves d'inégalités.

a) Montrons que pour tout x réel positif, on a $\frac{x}{x^2+1} \leq x$.

Soit x un réel positif. Montrons que $\frac{x}{x^2+1} \leq x$.

• Méthode 1 : par inégalités successives.

On a $x^2 \geq 0$ donc $x^2+1 \geq 1$ et par décroissance de la fonction sur $\mathbb{R}_+^*$ (et donc sur $[1,+\infty[$), on a $\frac{1}{x^2+1} \leq 1$.

Puisque $x \geq 0$, on a par produit que $\frac{x}{x^2+1} \leq x$.

- Méthode 2 : par étude du signe de la différence.

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2+1} - x &= \frac{x - x(x^2+1)}{x^2+1} \\ &= -\frac{x^3}{x^2+1} \leq 0 \quad (\text{car } x^3 \geq 0 \text{ et } x^2+1 > 0)\end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{x}{x^2+1} - x \leq 0$ d'où $\frac{x}{x^2+1} \leq x$.

Pour tout x réel positif, on a $\frac{x}{x^2+1} \leq x$.

- b) Montrons que pour tout x réel compris entre 2 et 5, on a $\frac{3}{2} \leq \frac{2x-1}{x} \leq \frac{9}{5}$.

Soit x un réel tel que $2 \leq x \leq 5$. Notons que $\frac{2x-1}{x} = 2 - \frac{1}{x}$.

La fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (donc sur $[2, 5]$), on a $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ d'où $-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{x} \leq -\frac{1}{5}$ et par somme, on a $2 - \frac{1}{2} \leq 2 - \frac{1}{x} \leq 2 - \frac{1}{5}$ soit $\frac{3}{2} \leq \frac{2x-1}{x} \leq \frac{9}{5}$.

- c) Montrer que pour tout x réel compris entre 1 et 3, on a $|x^3 - 5x^2 + 11| \leq 33$.

Soit x un réel tel que $1 \leq x \leq 3$.

Par croissance de la fonction cube sur $\mathbb{R}$ (donc sur $[1, 3]$), on a $1 \leq x^3 \leq 27$.

La fonction carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+$ (donc sur $[1, 3]$), on a $1 \leq x^2 \leq 9$ d'où $-45 \leq -5x^2 \leq -5$.

Par somme d'inégalités, on obtient $-44 \leq x^3 - 5x^2 \leq 22$ et on trouve $-33 \leq x^3 - 5x^2 + 11 \leq 33$ soit $|x^3 - 5x^2 + 11| \leq 33$.

- d) Soit x un réel.

On écrit $x - 2 = (-x + 1) + (2x - 3)$ et par inégalité triangulaire, on obtient $|x - 2| \leq |-x + 1| + |2x - 3|$.

Or, $|-x + 1| = |x - 1|$ donc $|x - 2| \leq |x - 1| + |2x - 3|$.

Pour tout x réel, on a $|x - 2| \leq |x - 1| + |2x - 3|$.

2 Résolutions d'équations et inéquations

2.1 Correction des exercices sur les équations

Correction de l'exercice 7. Équations se ramenant à des équations du premier degré.

Pour tout i entier entre 1 et 6, on note $S_{(E_i)}$ l'ensemble des solutions de l'équation (E_i) .

1) Soit $(E_1) : 2x - 3 = 7$. Alors $S_{(E_1)} = \{5\}$.

2) Soit $(E_2) : -x + 11 = 5x$. Alors $S_{(E_2)} = \left\{\frac{11}{6}\right\}$.

3) Soit $(E_3) : 3x - 2 = 2x + 11$. Alors $S_{(E_3)} = \{13\}$.

4) Soit $(E_4) : x(x - 1) = x(x + 2)$.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} x \in S_{(E_4)} &\iff x(x - 1) = x(x + 2) \\ &\iff x(x - 1) - x(x + 2) = 0 \\ &\iff x(x - 1 - (x + 2)) = 0 \\ &\iff -3x = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $S_{(E_4)} = \{0\}$.

5) Soit $(E_5) : (2x - 5)(x + 2) = (4x + 8)(3x - 11)$.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} x \in S_{(E_5)} &\iff (2x - 5)(x + 2) = (4x + 8)(3x - 11) \\ &\iff (2x - 5)(x + 2) = 4(x + 2)(3x - 11) \\ &\iff (2x - 5)(x + 2) - 4(x + 2)(3x - 11) = 0 \\ &\iff (x + 2)((2x - 5) - 4(3x - 11)) = 0 \\ &\iff (x + 2)(-10x + 39) = 0 \\ &\iff x + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad -10x + 39 = 0 \\ &\iff x = -2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{39}{10} \end{aligned}$$

Ainsi, $S_{(E_5)} = \left\{-2, \frac{39}{10}\right\}$.

6) Soit $(E_6) : (3x + 3)^2(x - 3) = (x + 1)^2(2x - 5)$.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} x \in S_{(E_6)} &\iff (3x + 3)^2(x - 3) = (x + 1)^2(2x - 5) \\ &\iff 9(x + 1)^2(x - 3) - (x + 1)^2(2x - 5) = 0 \\ &\iff (x + 1)^2(9(x - 3) - (2x - 5)) = 0 \\ &\iff (x + 1)^2(7x - 22) = 0 \\ &\iff x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad 7x - 22 = 0 \\ &\iff x = -1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{22}{7} \end{aligned}$$

Ainsi, $S_{(E_6)} = \left\{-1, \frac{22}{7}\right\}$.

Correction de l'exercice 8. Equations de premier degré avec paramètre.

Soit $m \in \mathbb{R}$.

Pour tout i entier compris entre 1 et 4, on note $S_{(E_i)}(m)$ l'ensemble des solutions de l'équation $(E_i)(m)$.

1) Soit $(E_1(m)) : mx + 7 = 5$.

- Si $m = 0$, alors $(E_1(m))$ n'a pas de solution car sinon il existerait un réel x tel que $0 \times x + 7 = 5$ donc $7 = 5$ ce qui est absurde.
- Supposons $m \neq 0$.
Soit x un réel.

$$\begin{aligned} x \in S_{(E_1)}(m) &\iff mx + 7 = 5 \\ &\iff x = -\frac{2}{m} \end{aligned}$$

$$S_{(E_1)}(m) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } m = 0 \\ \left\{-\frac{2}{m}\right\} & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$$

2) Soit $(E_2(m)) : (1 - m)x + 5 = 11$.

- Si $m = 1$, alors $(E_2(m))$ n'a pas de solution car sinon il existerait un réel x tel que $0 \times x + 5 = 11$ donc $5 = 11$ ce qui est absurde.
- Supposons $m \neq 1$.
Soit x un réel.

$$\begin{aligned} x \in S_{(E_2)}(m) &\iff (1 - m)x + 5 = 11 \\ &\iff x = \frac{6}{1 - m} \end{aligned}$$

$$S_{(E_2)}(m) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } m = 1 \\ \left\{\frac{6}{1 - m}\right\} & \text{si } m \neq 1 \end{cases}$$

3) Soit $(E_3(m)) : (m + 2)x - 4 = 2m$.

- Si $m = -2$, tout réel est solution de $(E_3(m))$ puisque si pour tout x réel, on a $(m + 2) \times x - 4 = -4 = 2m$.
- Supposons $m \neq -2$. Soit x un réel.

$$\begin{aligned} x \in S_{(E_3)}(m) &\iff (m + 2)x - 4 = 2m \\ &\iff x = \frac{2m + 4}{m + 2} \\ &\iff x = 2 \end{aligned}$$

$$S_{(E_3)}(m) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } m = -2 \\ \{2\} & \text{si } m \neq -2 \end{cases}$$

4) Soit $(E_4(m)) : (m^2 - 2m + 1)x + m = 1$.

Notons que $m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2$ donc la disjonction de cas portera sur $m = 1$ et $m \neq 1$.

- Supposons $m = 1$. Alors $(E_4(m))$ s'écrit $1 = 1$ ce qui est vrai donc l'ensemble des solutions de $(E_4(m))$ lorsque $m = 1$ est égal à $\mathbb{R}$.
- Supposons $m \neq 1$.
Soit x un réel.

$$\begin{aligned} x \in S_{(E_4)}(m) &\iff (m^2 - 2m + 1)x + m = 1 \\ &\iff (m - 1)^2 m = 1 - m \\ &\iff x = \frac{1 - m}{(m - 1)^2} \\ &\iff x = \frac{1}{1 - m} \end{aligned}$$

$$S_{(E_4)}(m) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } m = 1 \\ \left\{\frac{1}{1 - m}\right\} & \text{si } m \neq 1 \end{cases}$$

Correction de l'exercice 9. Équations du second degré ou équations s'y ramenant.

Pour tout i entier compris entre 1 et 12, on note $S_{(E_i)}$ l'ensemble des solutions (réelles) de (E_i) .

1) Soit $(E_1) : x^2 + x - 6 = 0$.

- *Méthode 1.* On remarque que pour tout x réel, on a $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$ donc x est solution de (E_1) si et seulement si $x + 3 = 0$ ou $x - 2 = 0$ c'est-à-dire $x = -3$ ou $x = 2$.

- *Méthode 2.* Le discriminant de (E_1) est $1 - 4 \times (-6) = 25 = 5^2 > 0$ donc (E_1) admet deux solutions réelles qui sont $\frac{-1-5}{2}$ et $\frac{-1+5}{2}$ c'est-à-dire -3 et 2 .

$$S_{(E_1)} = \{-3, 2\}.$$

2) Soit $(E_2) : 4x^2 - 2x + 1 = 0$.

Le discriminant de (E_2) est $(-2)^2 - 4 \times 4 = -12 < 0$ donc (E_2) n'admet pas de solution.

$$S_{(E_2)} = \emptyset.$$

3) Soit $(E_3) : x^2 - x - 1 = 0$.

Le discriminant de (E_3) vaut $(-1)^2 - 4 \times (-1) = 5 > 0$ donc (E_3) admet deux solutions réelles qui sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$S_{(E_3)} = \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

4) Soit $(E_4) : x^2 + x + 1 = 0$.

Le discriminant de (E_4) vaut $1^2 - 4 \times 1 = -3 < 0$ donc (E_4) n'admet pas de solution.

$$S_{(E_4)} = \emptyset.$$

5) Soit $(E_5) : 2x^2 + x - 3 = 0$.

Le discriminant de (E_5) vaut $1^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 = 5^2 > 0$ donc (E_5) admet deux solutions réelles qui sont $\frac{-1-5}{4}$ et $\frac{-1+5}{4}$ soit $-\frac{3}{2}$ et 1 .

$$S_{(E_5)} = \left\{ -\frac{3}{2}, 1 \right\}.$$

6) Soit $(E_6) : 3x^2 - 5x + 2 = 0$.

Le discriminant de (E_6) est égal à $(-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1 > 0$ donc (E_6) admet deux solutions qui sont $\frac{5-1}{6}$ et $\frac{5+1}{6}$ soit $\frac{2}{3}$ et 1 .

$$S_{(E_6)} = \left\{ \frac{2}{3}, 1 \right\}.$$

7) Soit $(E_7) : x^4 - 3x^2 + 1 = 0$.

On voit une équation du second degré d'inconnue $X = x^2$: considérons (E'_7) alors l'équation $X^2 - 3X + 1 = 0$.

Le discriminant de (E'_7) vaut $(-3)^2 - 4 \times 1 = 5 > 0$ donc (E'_7) admet deux solutions réelles qui sont $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} x^2 - 3x^2 + 1 = 0 &\iff x^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad x^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ &\iff x = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \quad (\text{car } \frac{3-\sqrt{5}}{2} > 0) \end{aligned}$$

$$S_{(E_7)} = \left\{ \sqrt{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \right\}.$$

En notant que $\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$, on peut aussi écrire :

$$S_{(E_7)} = \left\{ \frac{-\sqrt{5}-1}{2}, \frac{-\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right\}.$$

8) Soit $(E_8) : (x+1)^2 - 5(x+1) + 6 = 0$.

On voit une équation du second degré d'inconnue $X = x+1$: considérons alors (E'_8) l'équation $X^2 - 5X + 6 = 0$.

On note que pour tout X réel, on a $X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$ donc (E'_8) a pour solutions 2 et 3 .

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} (x+1)^2 - 5(x+1) + 6 = 0 &\iff x+1 = 2 \quad \text{ou} \quad x+1 = 3 \\ &\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 2 \end{aligned}$$

$$S_{(E_8)} = \{1, 2\}$$

9) Soit $(E_9) : (-2x + 1)^2 - 7(-2x + 1) + 12 = 0$.

On voit une équation du second degré d'inconnue $X = -2x + 1$: considérons (E'_9) l'équation $X^2 - 7X + 12 = 0$.

On vérifie facilement que 3 et 4 sont les solutions de (E'_9) .

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} (-2x + 1)^2 - 7(-2x + 1) + 12 = 0 &\iff -2x + 1 = 3 \quad \text{ou} \quad -2x + 1 = 4 \\ &\iff x = -1 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$S_{(E_9)} = \left\{ -1, -\frac{3}{2} \right\}.$$

10) Soit $(E_{10}) : x^4 - x^3 + x^2 = 0$.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} x^4 - x^3 + x^2 = 0 &\iff x^2(x^2 - x + 1) = 0 \\ &\iff x^2 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - x + 1 = 0 \end{aligned}$$

Notons que l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ admet pour discriminant $-3 < 0$ donc n'admet pas de solutions réelles donc

$$\begin{aligned} x^4 - x^3 + x^2 = 0 &\iff x^2 = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

$$S_{(E_{10})} = \{0\}.$$

11) Soit $(E_{11}) : x^4 + 2x^3 - 3x^2 = 0$.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 - 3x^2 = 0 &\iff x^2(x^2 + 2x - 3) = 0 \\ &\iff x^2 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + 2x - 3 = 0. \end{aligned}$$

Notons que l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$ admet pour discriminant $16 > 0$ donc admet deux solutions réelles qui sont $\frac{-2-4}{2} = -3$ et $\frac{-2+4}{2} = 1$ d'où

$$x^4 + 2x^3 - 3x^2 = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -3 \quad \text{ou} \quad x = 1$$

$$S_{(E_{11})} = \{-3, 0, 1\}.$$

12) Soit $(E_{12}) : 11x^4 + 44x^3 + 44x^2 = 0$.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} 11x^4 + 44x^3 + 44x^2 = 0 &\iff 11x^2(x^2 + 4x + 4) = 0 \\ &\iff 11x^2(x + 2)^2 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -2 \end{aligned}$$

$$S_{(E_{12})} = \{-2, 0\}.$$

Correction de l'exercice 10. Equations du second degré avec paramètre.

Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour tout i entier compris entre 1 et 6, on note $S_{(E_i)}(m)$ l'ensemble des solutions de $(E_i)(m)$.

1) Soit $(E_1)(m) : mx^2 - 2x + 3m = 0$.

- Si $m = 0$, alors $(E_1)(m)$ s'écrit $-2x = 0$ dont l'unique solution est 0.
- Supposons $m \neq 0$. L'équation $(E_1)(m)$ a pour discriminant $4 - 12m^2$ donc $(E_1)(m)$ admet au moins une solution réelle si et seulement si $4 - 12m^2 \geq 0$ c'est-à-dire $m^2 \leq \frac{1}{3}$ c'est-à-dire $|m| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Dans ce cas :

- ▷ si $|m| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ alors $(E_1)(m)$ admet une unique solution qui vaut $\frac{2}{2m}$ soit $\sqrt{3}$ si $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $-\sqrt{3}$ si $m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;
- ▷ si $|m| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ alors $(E_1)(m)$ admet deux solutions réelles qui sont $\frac{2 - \sqrt{4 - 12m^2}}{2m}$ et $\frac{2 + \sqrt{4 - 12m^2}}{2m}$ c'est-à-dire $\frac{1 - \sqrt{1 - 3m^2}}{m}$ et $\frac{1 + \sqrt{1 - 3m^2}}{m}$.

$$S_{(E_1)}(m) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } |m| > \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \{-\sqrt{3}\} & \text{si } m = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \{0\} & \text{si } m = 0 \\ \{\sqrt{3}\} & \text{si } m = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \left\{ \frac{1-\sqrt{1-3m^2}}{m}, \frac{1+\sqrt{1-3m^2}}{m} \right\} & \text{si } m \neq 0 \text{ et } |m| < \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

2) Soit $(E_2)(m) : x^2 + mx + 1 = 0$.

Le discriminant de $(E_2)(m)$ vaut $m^2 - 4$ donc $(E_2)(m)$ admet au moins une solution réelle si et seulement si $m^2 - 4 \geq 0$ c'est-à-dire $|m| \geq 2$.

- Si $|m| = 2$, alors $(E_2)(m)$ a pour unique solution $-\frac{m}{2}$ c'est-à-dire 1 si $m = -2$ et -1 si $m = 2$.
- Supposons $|m| > 2$. Alors $(E_2)(m)$ admet deux solutions qui sont $\frac{-m - \sqrt{m^2 - 4}}{2}$ et $\frac{-m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}$

$$S_{(E_1)}(m) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } |m| < 2 \\ \{1\} & \text{si } m = -2 \\ \{-1\} & \text{si } m = 2 \\ \left\{ \frac{-m - \sqrt{m^2 - 4}}{2}, \frac{-m + \sqrt{m^2 - 4}}{2} \right\} & \text{si } |m| > 2 \end{cases}$$

3) Soit $(E_3)(m) : 3x^2 + 2mx + (1 + m) = 0$.

Le discriminant de $(E_3)(m)$ est $4m^2 - 12(1 + m)$ donc $(E_3)(m)$ admet au moins une solution réelle si et seulement si $m^2 - 3m - 3 \geq 0$.

La fonction trinôme $t \mapsto t^2 - 3t - 3$ a pour discriminant $21 > 0$ donc admet deux racines réelles qui sont $\frac{3 - \sqrt{21}}{2}$ et $\frac{3 + \sqrt{21}}{2}$.

En particulier, la fonction trinôme $t \mapsto t^2 - 3t - 3$ est positive sur $]-\infty, \frac{3 - \sqrt{21}}{2}] \cup [\frac{3 + \sqrt{21}}{2}, +\infty[$ et négative sur $[\frac{3 - \sqrt{21}}{2}, \frac{3 + \sqrt{21}}{2}]$.

Ainsi, $(E_3)(m)$ admet au moins une solution réelle si et seulement si m appartient à $]-\infty, \frac{3 - \sqrt{21}}{2}] \cup [\frac{3 + \sqrt{21}}{2}, +\infty[$.

- Si $m \in \left\{ \frac{3 - \sqrt{21}}{2}, \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \right\}$, le discriminant de $(E_3)(m)$ est nul et l'unique solution de $(E_3)(m)$ est $-\frac{2m}{6} = -\frac{m}{3}$.
- Supposons $m \in]-\infty, \frac{3 - \sqrt{21}}{2}[\cup]\frac{3 + \sqrt{21}}{2}, +\infty[$.

Le discriminant de $(E_3)(m)$ est strictement positif donc $(E_3)(m)$ admet deux solutions qui sont $\frac{-2m - \sqrt{m^2 - 3m - 3}}{6}$ et $\frac{-2m + \sqrt{m^2 - 3m - 3}}{6}$.

$$S_{(E_3)}(m) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } m \in \left] \frac{3 - \sqrt{21}}{2}, \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \right[\\ \left\{ -\frac{m}{3} \right\} & \text{si } m \in \left\{ \frac{3 - \sqrt{21}}{2}, \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \right\} \\ \left\{ \frac{-2m - \sqrt{m^2 - 3m - 3}}{6}, \frac{-2m + \sqrt{m^2 - 3m - 3}}{6} \right\} & \text{si } m \in]-\infty, \frac{3 - \sqrt{21}}{2}[\cup]\frac{3 + \sqrt{21}}{2}, +\infty[\end{cases}$$

4) Soit $(E_4)(m) : 4x^2 + 2mx + (m - 1) = 0$.

Le discriminant de $(E_4)(m)$ vaut $4m^2 - 16(m - 1) = 4(m^2 - 4m + 4)$ donc $(E_4)(m)$ admet au moins une solution réelle si et seulement si $4(m^2 - 4m + 4) \geq 0$ ce qui est toujours vrai car $4(m^2 - 4m + 4) = 4(m - 2)^2 \geq 0$.

- Si $m = 2$, alors $(E_4)(m)$ admet une unique solution qui vaut $-\frac{m}{4}$ c'est-à-dire $-\frac{1}{2}$.
- Supposons $m \neq 2$. Alors $(E_4)(m)$ admet deux solutions réelles qui sont $\frac{-2m - 2(m - 2)}{8}$ et $\frac{-2m + 2(m - 2)}{8}$ soit $\frac{-m + 1}{2}$ et $-\frac{1}{4}$.

$$S_{(E_4)}(m) = \begin{cases} \left\{ -\frac{1}{2} \right\} & \text{si } m = 2 \\ \left\{ \frac{-m + 1}{2}, -\frac{1}{4} \right\} & \text{si } m \neq 2 \end{cases}$$

5) Soit $(E_5)(m) : (4m + 3)x^2 + mx + \frac{1}{4} = 0$.

- Supposons $4m + 3 = 0$ c'est-à-dire $m = -\frac{3}{4}$. L'équation $(E_5)(m)$ s'écrit $-\frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = 0$ donc admet une unique solution qui est $\frac{1}{3}$.
- Supposons $m \neq -\frac{3}{4}$.

Le discriminant de $(E_5)(m)$ vaut $m^2 - 4m - 3$.

La fonction trinôme $t \mapsto t^2 - 4t - 3$ a pour discriminant $28 = (2\sqrt{7})^2 > 0$ donc admet deux racines qui sont $\frac{4 - 2\sqrt{7}}{2} = 2 - \sqrt{7}$ et $\frac{4 + 2\sqrt{7}}{2} = 2 + \sqrt{7}$.

De plus, la fonction trinôme $t \mapsto t^2 - 4t - 3$ est positive sur $]-\infty, 2 - \sqrt{7}] \cup [2 + \sqrt{7}, +\infty[$ et négative sur $[2 - \sqrt{7}, 2 + \sqrt{7}]$.

Ainsi, l'équation $(E_5)(m)$ admet au moins une solution réelle si et seulement si m appartient à $]-\infty, 2 - \sqrt{7}] \cup [2 + \sqrt{7}, +\infty[$.

- ▷ Si $m \in \{2 - \sqrt{7}, 2 + \sqrt{7}\}$, alors $(E_5)(m)$ admet une unique solution qui est $-\frac{m}{2(4m+3)}$ soit $-\frac{2 - \sqrt{7}}{4(2 - \sqrt{7}) + 3} = \frac{2 + \sqrt{7}}{3}$ si $m = 2 - \sqrt{7}$ ou $-\frac{2 + \sqrt{7}}{4(2 + \sqrt{7}) + 3} = \frac{2 - \sqrt{7}}{3}$ si $m = 2 + \sqrt{7}$.

- ▷ Si $m \in]-\infty, 2 - \sqrt{7}[\cup]2 + \sqrt{7}, +\infty[$ alors $(E_5)(m)$ admet deux solutions réelles qui sont $-\frac{m - \sqrt{m^2 - 4m - 3}}{2(4m+3)}$ et $-\frac{m + \sqrt{m^2 - 4m - 3}}{2(4m+3)}$

$$S_{(E_5)}(m) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } m \in]2 - \sqrt{7}, 2 + \sqrt{7}[\\ \left\{ \frac{2 \mp \sqrt{7}}{3} \right\} & \text{si } m = 2 \pm \sqrt{7} \\ \left\{ \frac{-m - \sqrt{m^2 - 4m - 3}}{2(4m+3)}, \frac{-m + \sqrt{m^2 - 4m - 3}}{2(4m+3)} \right\} & \text{si } m \in]-\infty, 2 - \sqrt{7}[\cup]2 + \sqrt{7}, +\infty[\end{cases}$$

6) Soit $(E_6)(m) : (m-2)x^2 + mx + 2 = 0$.

- Supposons $m-2=0$ c'est-à-dire $m=2$. L'équation $(E_6)(m)$ s'écrit alors $2x+2=0$ qui a pour unique solution -1 .
- Supposons $m \neq 2$. Le discriminant de $(E_6)(m)$ vaut $m^2 - 8(m-2) = (m-4)^2 \geq 0$ donc $(E_6)(m)$ admet au moins une solution réelle (une unique si $m=4$, deux sinon).

- ▷ Si $m=4$, l'unique solution de $(E_6)(m)$ est $-\frac{m}{2(m-2)} = -1$.

- ▷ Si $m \neq 4$, les solutions de $(E_6)(m)$ sont $-\frac{m - (m-4)}{2(m-2)} = -1$ et $-\frac{m + (m-4)}{2(m-2)} = -\frac{2}{m-2}$.

$$S_{(E_6)}(m) = \begin{cases} \{-1\} & \text{si } m \in \{2, 4\} \\ \{-1, -\frac{2}{m-2}\} & \text{si } m \in \mathbb{R} \setminus \{2, 4\} \end{cases}$$

Correction de l'exercice 11. Relations entre coefficients et racines d'un trinôme.

Soit a, b, c des réels avec $a \neq 0$ et P la fonction trinôme définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = ax^2 + bx + c.$$

On suppose que x_1 et x_2 sont des racines **distinctes** de P c'est-à-dire que $P(x_1) = 0$, $P(x_2) = 0$ et $x_1 \neq x_2$.

1) Soit x un réel.

$$\begin{aligned} P(x) - P(x_1) &= ax^2 + bx + c - (ax_1^2 + bx_1 + c) \\ &= a(x^2 - x_1^2) + b(x - x_1) \\ &= a(x - x_1)(x + x_1) + b(x - x_1) \\ &= (x - x_1)(a(x + x_1) + b). \end{aligned}$$

Comme $P(x_1) = 0$, on trouve $P(x) = (x - x_1)(a(x + x_1) + b)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ réel, on a } P(x) = (x - x_1)(a(x + x_1) + b).}$$

2) Montrons que pour tout x réel, on a $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

On applique la question 1) pour $x = x_2$ et on trouve $P(x_2) = (x_2 - x_1)(a(x_1 + x_2) + b)$.

Or, $P(x_2) = 0$ et comme $x_2 \neq x_1$, on obtient $a(x_1 + x_2) + b = 0$. En particulier, $b = -a(x_1 + x_2)$.

En utilisant la question 1), on a pour tout x réel, $P(x) = (x - x_1)(a(x + x_1) - a(x_1 + x_2))$ soit $P(x) = (x - x_1)(a(x - x_2))$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ réel, on a } P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).}$$

3) Soit x un réel. On a

$$\begin{aligned} (x - x_1)(x - x_2) &= x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 \\ &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ réel, on a } (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2.}$$

4) Les questions 2) et 3) donnent :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 \quad (*)$$

Remarque : on pourra utiliser l'unicité de l'écriture d'un polynôme mais un tel résultat pourra être utilisé plus tard avec une jolie démonstration ☺

On prend $x = 0$ dans $(*)$ et on trouve $c = ax_1x_2$ soit $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ car $a \neq 0$.

On dérive $(*)$ et on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2ax + b = 2ax - a(x_1 + x_2) \quad (**)$$

On prend alors $x = 0$ dans $(**)$ et on trouve $b = -a(x_1 + x_2)$ soit $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } x_1x_2 = \frac{c}{a}.$
--

2.2 Correction sur les exercices sur les inéquations

Correction de l'exercice 12. Inéquations du premier degré ou s'y ramenant.

Pour tout k entier compris entre 1 et 6, on note $S_{(I_k)}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_k) .

1) Soit $(I_1) : 2x + 1 \geq 3$.

Soit x un réel.

$$2x + 1 \geq 3 \iff x \geq 1$$

$$S_{(I_1)} = [1, +\infty[.$$

2) Soit $(I_2) : -3x + 1 \geq -4$.

Soit x un réel.

$$-3x + 1 \geq -4 \iff x \leq \frac{5}{3}$$

$$S_{(I_2)} = \left] -\infty, \frac{5}{3} \right].$$

3) Soit $(I_3) : \frac{1}{x-2} \leq 3$.

- L'inéquation (I_3) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- Soit x un réel différent de 2.

$$\frac{1}{x-2} \leq 3 \iff \frac{1}{x-2} - 3 \leq 0$$

$$\iff \frac{1-3(x-2)}{x-2} \leq 0$$

$$\iff \frac{3x-7}{x-2} \geq 0$$

$$\iff (3x-7)(x-2) \geq 0 \quad (\text{l'inégalité précédente signifie que } 3x-7 \text{ et } x-2 \text{ sont de même signe})$$

$$\iff x \in]-\infty, 2[\cup \left] \frac{7}{3}, +\infty \right[$$

$$S_{(I_3)} =]-\infty, 2[\cup \left] \frac{7}{3}, +\infty \right[.$$

4) Soit $(I_4) : \frac{x+1}{x+2} \leq 1$.

- L'inéquation (I_4) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
- Soit x un réel différent de -2 .

$$\frac{x+1}{x+2} \leq 1 \iff \frac{x+1-(x+2)}{x+2} \leq 0$$

$$\iff \frac{-1}{x+2} \leq 0$$

$$\iff x+2 > 0$$

$$S_{(I_4)} =]-2, +\infty[.$$

5) Soit $(I_5) : \frac{x+1}{-x+3} \leq 2$.

- L'inéquation (I_5) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- Soit x un réel différent de 3.

$$\frac{x+1}{-x+3} \leq 2 \iff \frac{x+1-2(-x+3)}{-x+3} \leq 0$$

$$\iff \frac{3x-5}{-x+3} \leq 0$$

$$\iff (3x-5)(x-3) \geq 0$$

$$\iff x \in \left] -\infty, \frac{5}{3} \right] \cup]3, +\infty[$$

$$S_{(I_5)} = \left] -\infty, \frac{5}{3} \right] \cup]3, +\infty[.$$

6) Soit $(I_6) : \frac{x-2}{4x-4} \geq \frac{x-1}{x-2}$.

- L'inéquation (I_6) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.
- Soit x un réel différent de 1.

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{4x-4} \geq \frac{x-1}{x-2} &\iff \frac{(x-2)^2 - 4(x-1)^2}{4(x-1)(x-2)} \geq 0 \\ &\iff \frac{(x-2)^2 - (2x-2)^2}{4(x-1)(x-2)} \geq 0 \\ &\iff \frac{(x-2 - (2x-2))(x-2 + (2x-2))}{4(x-1)(x-2)} \geq 0 \\ &\iff \frac{x(3x-4)}{4(x-1)(x-2)} \leq 0 \\ &\iff x \in [0, 1[\cup \left[\frac{4}{3}, 2 \right[\quad (\text{par tableau de signes non présenté ici}) \end{aligned}$$

$$S_{(I_6)} = [0, 1[\cup \left[\frac{4}{3}, 2 \right[.$$

Correction de l'exercice 13. Inéquations du second degré ou s'y ramenant.

Pour tout k entier compris entre 1 et 6, on note $S_{(I_k)}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_k) .

1) Soit $(I_1) : x^2 - 7x + 6 \leq 0$.

Notons que pour tout x réel, on a $x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6)$ (mais on aurait pu aussi passer par le discriminant du trinôme $t \mapsto t^2 - 7t + 6$).

$$S_{(I_1)} = [1, 6].$$

2) Soit $(I_2) : 2x^2 - 3x + 1 \geq 0$.

Le discriminant du trinôme $t \mapsto 2t^2 - 3t + 1$ vaut $1 > 0$ donc les racines de celui-ci sont $\frac{1}{2}$ et 1. Par étude du signe de ce trinôme, on trouve :

$$S_{(I_2)} =]-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1, +\infty[.$$

3) Soit $(I_3) : -x^2 + 4x - 1 \leq -x + 3$.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x - 1 \leq -x + 3 &\iff x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ &\iff (x-1)(x-4) \geq 0 \\ &\iff x \in]-\infty, 1] \cup [4, +\infty[\end{aligned}$$

$$S_{(I_3)} =]-\infty, 1] \cup [4, +\infty[.$$

4) Soit $(I_4) : \frac{x+2}{x+1} \leq \frac{x+3}{x+4}$.

- L'inéquation (I_4) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-4, -1\}$.
- Soit x un réel de $\mathbb{R} \setminus \{-4, -1\}$.

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x+1} \leq \frac{x+3}{x+4} &\iff \frac{(x+2)(x+4) - (x+3)(x+1)}{(x+1)(x+4)} \leq 0 \\ &\iff \frac{2x+5}{(x+1)(x+4)} \leq 0 \\ &\iff x \in]-\infty, -4[\cup \left[-\frac{5}{2}, -1 \right[\quad (\text{par tableau de signes non présenté ici}) \end{aligned}$$

$$S_{(I_4)} =]-\infty, -4[\cup \left[-\frac{5}{2}, -1 \right[$$

5) Soit $(I_5) : \frac{2x-3}{x+1} \geq \frac{x+3}{x-2}$.

- L'inéquation (I_5) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

- Soit x un réel de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

$$\begin{aligned}
 \frac{2x-3}{x+1} \geq \frac{x+3}{x-2} &\iff \frac{(2x-3)(x-2) - (x+3)(x+1)}{(x+1)(x-2)} \geq 0 \\
 &\iff \frac{x^2 - 11x + 3}{(x+1)(x-2)} \geq 0 \\
 &\iff \frac{\left(x - \frac{11-\sqrt{109}}{2}\right)\left(x - \frac{11+\sqrt{109}}{2}\right)}{(x+1)(x-2)} \geq 0 \quad (\text{par étude du trinôme au numérateur}) \\
 &\iff x \in]-\infty, -1[\cup \left[\frac{11-\sqrt{109}}{2}, 2\right[\cup \left[\frac{11+\sqrt{109}}{2}, +\infty\right[\quad (\text{par étude de signes non présentée ici}) \\
 S_{(I_5)} &=]-\infty, -1[\cup \left[\frac{11-\sqrt{109}}{2}, 2\right[\cup \left[\frac{11+\sqrt{109}}{2}, +\infty\right[
 \end{aligned}$$

6) Soit $(I_6) : \frac{x-3}{2x-1} \leq \frac{2x+1}{x+3}$.

- L'inéquation (I_6) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3, \frac{1}{2}\}$.
- Soit x un réel de $\mathbb{R} \setminus \{-3, \frac{1}{2}\}$.

$$\begin{aligned}
 \frac{x-3}{2x-1} \leq \frac{2x+1}{x+3} &\iff \frac{(x-3)(x+3) - (2x+1)(2x-1)}{(2x-1)(x+3)} \leq 0 \\
 &\iff \frac{3x^2 + 8}{(2x-1)(x+3)} \geq 0 \\
 &\iff (2x-1)(x+3) \geq 0 \quad (\text{car } 3x^2 + 8 > 0) \\
 &\iff x \in]-\infty, -3[\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\\
 S_{(I_6)} &=]-\infty, -3[\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[
 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 14. Inéquations avec paramètre.

Soit m un réel. Pour tout k entier compris entre 1 et 6, on note $S_{(I_k)}(m)$ l'ensemble des solutions de $(I_k)(m)$.

1) Soit $(I_1)(m) : mx + 3 \geq m^2$.

- Si $m = 0$, l'inéquation $(I_1)(m)$ s'écrit $3 \geq 0$ ce qui est vérifiée sur $\mathbb{R}$.
- Supposons $m > 0$.
Soit x un réel.

$$\begin{aligned}
 mx + 3 \geq m^2 &\iff mx \geq m^2 - 3 \\
 &\iff x \geq m - \frac{3}{m} \quad (\text{car } m > 0)
 \end{aligned}$$

- Supposons $m < 0$.
Soit x un réel.

$$\begin{aligned}
 mx + 3 \geq m^2 &\iff mx \geq m^2 - 3 \\
 &\iff x \leq m - \frac{3}{m} \quad (\text{car } m < 0)
 \end{aligned}$$

$$S_{(I_1)}(m) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } m = 0 \\ \left[m - \frac{3}{m}, +\infty\right[& \text{si } m > 0 \\]-\infty, m - \frac{3}{m}] & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

2) Soit $(I_2)(m) : (m^2 + 1)x - 7 \leq m$.

Soit x un réel. En notant que $m^2 + 1 > 0$ (car $m^2 \geq 0$), on a :

$$\begin{aligned}
 (m^2 + 1)x - 7 \leq m &\iff (m^2 + 1)x \leq m + 7 \\
 &\iff x \leq \frac{m+7}{m^2+1}
 \end{aligned}$$

$$S_{(I_2)}(m) = \left]-\infty, \frac{m+7}{m^2+1}\right]$$

3) Soit $(I_3)(m) : (m+1)x^2 - mx + 11 \leq 2m$.

- Si $m + 1 = 0$ (c'est-à-dire $m = -1$), l'inéquation $(I_3)(m)$ s'écrit $x + 11 \leq -2$ soit $x \leq -13$.

- Supposons $m + 1 > 0$. L'inéquation $(I_3)(m)$ s'écrit aussi $(m + 1)x^2 - mx + 11 - 2m \leq 0$.

Le discriminant du trinôme ci-dessus notée Δ_m vaut $m^2 - 4(11 - 2m)(m + 1) = 9m^2 - 36m - 44$ et les racines du trinôme $m \mapsto 9m^2 - 36m - 44$ sont $\frac{6 - 4\sqrt{5}}{3}$ et $\frac{6 + 4\sqrt{5}}{3}$.

Ainsi, comme $m + 1 > 0$, on a que Δ_m est positif si et seulement si $m \in \left] -\infty, \frac{6 - 4\sqrt{5}}{3} \right] \cup \left[\frac{6 + 4\sqrt{5}}{3}, +\infty \right[$ et si $\Delta_m < 0$, alors $x \mapsto (m + 1)x^2 - mx + 11 - 2m$ est du signe de $m + 1$ (qui est strictement positif).

De ce fait :

▷ Si $\Delta_m < 0$ c'est-à-dire $m \in \left] \frac{6 - 4\sqrt{5}}{3}, \frac{6 + 4\sqrt{5}}{3} \right[$ alors pour tout x réel, on a $(m + 1)x^2 - mx + 11 - 2m > 0$ donc $(I_3)(m)$ n'a pas de solutions si $m + 1 > 0$ et $\Delta_m < 0$.

▷ Si $\Delta_m \geq 0$ c'est-à-dire $m \in \left] -\infty, \frac{6 - 4\sqrt{5}}{3} \right] \cup \left[\frac{6 + 4\sqrt{5}}{3}, +\infty \right[$ alors $x \mapsto (m + 1)x^2 - mx + 11 - 2m$ est négatif sur $[a_m^-, a_m^+]$ où $a_m^\pm = \frac{m \pm \sqrt{9m^2 - 36m - 44}}{2(m + 1)}$.

- Supposons $m + 1 < 0$.

Par des arguments similaires, on trouve :

▷ Si $\Delta_m < 0$ c'est-à-dire $m \in \left] \frac{6 - 4\sqrt{5}}{3}, \frac{6 + 4\sqrt{5}}{3} \right[$ alors pour tout x réel, on a $(m + 1)x^2 - mx + 11 - 2m < 0$ donc tout réel est solution de $(I_3)(m)$ si $m + 1 < 0$ et $\Delta_m < 0$ mais $\left] \frac{6 - 4\sqrt{5}}{3}, \frac{6 + 4\sqrt{5}}{3} \right[\cap] -\infty, -1[= \emptyset$ car $\frac{6 - 4\sqrt{5}}{3} > -1$.

▷ De ce fait, on a toujours $\Delta_m \geq 0$ c'est-à-dire $m \in \left] -\infty, \frac{6 - 4\sqrt{5}}{3} \right] \cup \left[\frac{6 + 4\sqrt{5}}{3}, +\infty \right[$ et $x \mapsto (m + 1)x^2 - mx + 11 - 2m$ est négatif sur $] -\infty, a_m^-] \cup [a_m^+, +\infty[$ où $a_m^\pm = \frac{m \pm \sqrt{9m^2 - 36m - 44}}{2(m + 1)}$.

$$S_{(I_3)} = \begin{cases}] -\infty, -13] & \text{si } m = -1 \\ \emptyset & \text{si } m \in \left] \frac{6 - 4\sqrt{5}}{3}, \frac{6 + 4\sqrt{5}}{3} \right[\\ \left[\frac{m - \sqrt{9m^2 - 36m - 44}}{2(m + 1)}, \frac{m + \sqrt{9m^2 - 36m - 44}}{2(m + 1)} \right] & \text{si } m \in \left] -1, \frac{6 - 4\sqrt{5}}{3} \right] \cup \left[\frac{6 + 4\sqrt{5}}{3}, +\infty \right[\\] -\infty, \frac{m - \sqrt{9m^2 - 36m - 44}}{2(m + 1)}] \cup \left[\frac{m + \sqrt{9m^2 - 36m - 44}}{2(m + 1)}, +\infty \right[& \text{si } m < -1 \end{cases}$$

- 4) Soit $(I_4)(m) : x^2 - 2x + m^2 \leq 4$.

L'inéquation $(I_4)(m)$ s'écrit $x^2 - 2x + m^2 - 4 \leq 0$.

Le discriminant de $x \mapsto x^2 - 2x + m^2 - 4$ est égal à $4 - 4(m^2 - 4) = 20 - 4m^2$.

- Si $20 - 4m^2 < 0$ (c'est-à-dire $|m| > \sqrt{5}$) alors $x \mapsto x^2 - 2x + m^2 - 4$ n'a pas de racines réelles et est strictement positif. Ainsi, si $|m| > \sqrt{5}$ alors $(I_4)(m)$ n'a pas de solutions.

- Si $20 - 4m^2 \geq 0$ (c'est-à-dire $m \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$) alors $x \mapsto x^2 - 2x + m^2 - 4$ est négatif sur $[a_m^-, a_m^+]$ où $a_m^\pm = \frac{2 \pm \sqrt{20 - 4m^2}}{2} = 1 \pm \sqrt{5 - m^2}$.

$$S_{(I_4)} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } |m| > \sqrt{5} \\ [1 - \sqrt{5 - m^2}, 1 + \sqrt{5 - m^2}] & \text{si } |m| \leq \sqrt{5} \end{cases}$$

3 Calculs sur les fonctions

3.1 Correction des exercices sur logarithmes et exponentielle

Correction de l'exercice 15. Expressions en logarithmes et exponentielles.

- 1) Soit $A = 3e^{5x}(-4e^{-4x+2})$. On trouve $A = -12e^{x+2}$.
- 2) Soit $B = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$.
On développe les deux carrés et on trouve $B = \frac{e^{2x}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{e^{-2x}}{4}$ soit $B = 1$.
- 3) Soit $C = e^{-10x+3} \times (e^{-x-2})^{-2} \times (e^{3x-2})^3$. On écrit $C = e^{-10x+3}e^{2x+4}e^{9x-6}$ soit $C = e^{x+1}$.
- 4) Soit $D = \ln\left((2+\sqrt{3})^{20}\right) + \ln\left((2-\sqrt{3})^{20}\right)$.
On écrit $D = 20\left(\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3})\right)$ soit $D = 20\ln((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}))$ d'où $D = 20\ln 1$. Ainsi, $D = 0$.
- 5) Soit $E = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.
On obtient $E = \ln\left(\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}{4}\right)$ d'où $E = \ln 1$ soit $E = 0$.
- 6) Soit $F = e^{3\ln 2}$. On écrit $F = e^{\ln(2^3)}$ soit $F = 2^3$ d'où $F = 8$.
- 7) Soit $G = \ln(\sqrt{e})$. On a $G = \frac{1}{2} \ln e$ d'où $G = \frac{1}{2}$.
- 8) Soit $H = \ln(e^{\frac{1}{3}})$. On écrit $H = \frac{1}{3} \ln e$ soit $H = \frac{1}{3}$.
- 9) Soit $I = e^{-2\ln 3}$. On a $I = \frac{1}{e^{2\ln 3}}$ soit $I = \frac{1}{e^{\ln(3^2)}}$ d'où $I = \frac{1}{9}$.
- 10) Soit $J = \ln(e^{-\frac{1}{2}})$. On trouve $J = -\frac{1}{2}$.
- 11) Soit $K = \ln(\sqrt[5]{e})$. De même, on a $K = \frac{1}{5}$.

Correction de l'exercice 16. Equations en logarithmes et exponentielles.

- 1) • L'équation (a) : $\ln(2x) = \frac{1}{2}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
• Pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, on a par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}\ln(2x) = \frac{1}{2} &\iff \ln(2x) = \ln e^{\frac{1}{2}} \\ &\iff x = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}\end{aligned}$$

L'unique solution de l'équation $\ln(2x) = \frac{1}{2}$ est $\frac{\sqrt{e}}{2}$.

- 2) • L'équation (b) : $\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln 2 = 0$ est définie sur $]1, +\infty[$ car pour tout x réel, $\ln(x^2 - 1)$ et $\ln(2x - 1)$ sont définis si et seulement si $|x| > 1$ et $x > \frac{1}{2}$, soit $x > 1$.
• Pour tout x réel dans $]1, +\infty[$, on a par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln 2 = 0 &\iff \ln\left(\frac{2(x^2 - 1)}{2x - 1}\right) = 0 \\ &\iff \frac{2(x^2 - 1)}{2x - 1} = 1 \\ &\iff x^2 - x - \frac{1}{2} = 0 \\ &\iff x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ &\iff x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad \text{car } x > 1 \text{ et } \frac{1 - \sqrt{3}}{2} < 0\end{aligned}$$

On remarque que $\frac{1+\sqrt{3}}{2} > 1$ car $\sqrt{3} > 1$.

L'unique solution de l'équation $\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln 2 = 0$ est $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

- 3) • L'équation (c) : $e^{2x+\ln 2} + e^{x+\ln 5} = 3$ est définie sur $\mathbb{R}$.

- Soit x un réel. On pose $X = e^x$.

$$\begin{aligned} x \text{ est une solution de (c)} &\iff 2(e^x)^2 + 5e^x = 3 \\ &\iff 2X^2 + 5X - 3 = 0 \\ &\iff X \text{ est une solution strictement positive de l'équation (c') : } z^2 + \frac{5}{2}z - \frac{3}{2} = 0 \end{aligned}$$

Or, les solutions de (c') sont -3 et $\frac{1}{2}$ donc par stricte croissance de $\exp$ de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x \text{ est une solution de (c)} &\iff X = \frac{1}{2} \\ &\iff x = -\ln 2 \end{aligned}$$

L'unique solution de l'équation $e^{2x+\ln 2} + e^{x+\ln 5} = 3$ est $-\ln 2$.

- 4) • L'équation (d) : $e^{x^2+6x} = \frac{1}{e^9}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

- Soit x un réel. Par stricte croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e^{x^2+6x} = \frac{1}{e^9} &\iff e^{x^2+6x+9} = 1 \\ &\iff x^2 + 6x + 9 = 0 \\ &\iff (x+3)^2 \\ &\iff x = -3 \end{aligned}$$

L'unique solution de l'équation $e^{x^2+6x} = \frac{1}{e^9}$ est -3 .

Correction de l'exercice 17. Inéquations en logarithmes et exponentielles.

- L'inéquation (a) : $1 \leq e^{-x^2+x}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout x réel, on a par stricte croissance de la fonction $\exp$ sur $\mathbb{R}$:

$$1 \leq e^{-x^2+x} \iff 0 \leq -x^2 + x$$

On sait que les racines du trinôme $-X^2 + X$ sont 0 et 1 et que $-t^2 + t$ est positif si et seulement si t appartient à $[0, 1]$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $1 \leq e^{-x^2+x}$ est $[0, 1]$.

- L'inéquation (c) : $e^{1+\ln x} \geq 2$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout x réel strictement positif, on a

$$\begin{aligned} e^{1+\ln x} \geq 2 &\iff ex \geq 2 \\ &\iff x \geq 2e^{-1}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{1+\ln x} \geq 2$ est $[2e^{-1}, +\infty[$.

- L'inéquation (c) : $e^{-6x} \leq \sqrt{e}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout x réel, on a par stricte croissance de la fonction $\exp$ sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e^{-6x} \leq \sqrt{e} &\iff -6x \leq \frac{1}{2} \\ &\iff x \geq -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{-6x} \leq \sqrt{e}$ est $[-\frac{1}{12}, +\infty[$.

- L'inéquation (d) : $(\ln x)^2 > 1$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
- On sait que pour tout u réel, $u^2 > 1$ si et seulement si $|u| > 1$ donc pour tout x réel strictement positif, $(\ln x)^2 > 1$ si et seulement si $\ln x > 1$ ou $\ln x < -1$. Par stricte croissance de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on trouve que pour tout x réel strictement positif :

$$(\ln x)^2 > 1 \iff x \in]-\infty, e^{-1}[\cup]e, +\infty[.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(\ln x)^2 > 1$ est $]0, e^{-1}[\cup]e, +\infty[$.

3.2 Correction des exercices sur la trigonométrie

Correction de l'exercice 18. Autour du formulaire trigonométrique.

1) a) $\cos(\pi) = -1$

b) $\sin(\pi) = 0$

c) Calculons $\cos(5\pi/6)$.

On écrit $5\pi/6 = \pi - \pi/6$ donc $\cos(5\pi/6) = \cos(\pi) \cos(-\pi/6) - \sin(\pi) \sin(-\pi/6)$ soit $\cos(5\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) De la même manière, on trouve $\sin(5\pi/6) = \frac{1}{2}$.

e) On écrit $2\pi/3 = \pi - \pi/3$ et on trouve $\cos(2\pi/3) = -\frac{1}{2}$.

f) De même, on trouve $\sin(2\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

g) En écrivant $3\pi/4 = \pi - \pi/4$, on trouve $\cos(3\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

h) De même, on a $\sin(3\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Soit x un réel.

a) $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$

b) $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$

c) $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

d) $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

e) $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$

f) $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$

g) $\cos(x + \pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(x) - \sin(x))$

h) $\sin(x + \pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(x) + \sin(x))$

i) $\cos(x - 50\pi) = \cos(x)$

j) $\sin(24\pi - x) = -\sin(x)$

k) $\cos(5\pi/2 + x) = -\sin(x)$

l) $\sin(x - 3\pi/2) = \cos(x)$.

3) Soit a et b deux réels.

a) En utilisant la formule du cosinus d'une somme pour $(a, -b)$ et l'impairité de $\sin$, on trouve $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$.

b) En utilisant la formule du sinus d'une somme pour $(a, -b)$ et la parité de $\cos$, on trouve $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)$.

c) On utilise la formule du cosinus d'une somme pour (a, a) et on trouve $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$.

De plus, $\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a)$ donc $\cos^2(a) - \sin^2(a) = \cos^2(a) - (1 - \cos^2(a))$ donc $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$.

d) On utilise la formule du sinus d'une somme pour (a, a) et on trouve $\sin(2a) = 2\sin(a) \cos(a)$.

e) D'après c), on a $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ d'où $\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$.

Par c), on a $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$ et comme $\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a)$, on obtient $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$ donc $\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$.

f) D'après a), on a

$$(I) \quad \cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$(II) \quad \cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

En sommant (I) et (II) puis en divisant par 2, on trouve $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b))$

g) En effectuant (II) - (I) dans la question f) et en divisant par 2, on trouve $\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$

h) D'après b), on a

$$(III) \quad \sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$$

$$(IV) \quad \sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)$$

On somme (III) et (IV) et on divise par 2 pour avoir $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$

Correction de l'exercice 19. Équations trigonométriques.

Pour tout i compris entre 1 et 6, on note $S_{(E_i)}$ l'ensemble des solutions de l'équation (E_i) .

1) Soit $(E_1) : \cos(x) = \frac{1}{2}$.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} \cos(x) = \frac{1}{2} &\iff \cos(x) = \cos(\pi/3) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \pi/3 + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\pi/3 + 2k\pi \end{aligned}$$

$$S_{(E_1)} = \{\pi/3 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\pi/3 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

2) Soit $(E_2) : \sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} \sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} &\iff \sin(2x) = \sin(\pi/3) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 2x = \pi/3 + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \pi - \pi/3 + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \pi/6 + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi/3 + k\pi \end{aligned}$$

$$S_{(E_2)} = \{\pi/6 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi/3 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

3) Soit $(E_3) : \cos(2x + \pi/3) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} \cos(2x + \pi/3) = \frac{\sqrt{2}}{2} &\iff \cos(2x + \pi/3) = \cos(\pi/4) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 2x + \pi/3 = \pi/4 + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x + \pi/3 = -\pi/4 + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = -\pi/24 + k\pi \quad \text{ou} \quad x = -7\pi/24 + k\pi \end{aligned}$$

$$S_{(E_3)} = \{-\pi/24 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-7\pi/24 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

4) Soit $(E_4) : \sin(2x - \pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} \sin(2x - \pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2} &\iff \sin(2x - \pi/6) = \sin(-\pi/3) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 2x - \pi/6 = -\pi/3 + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x - \pi/6 = \pi - (-\pi/3) + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = -\pi/12 + k\pi \quad \text{ou} \quad x = 3\pi/4 + k\pi \end{aligned}$$

$$S_{(E_4)} = \{-\pi/12 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{3\pi/4 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

5) Soit $(E_5) : \cos(3x) = 0$ sur $[0, \pi]$.

- Tout d'abord, nous allons résoudre (E_5) sur $\mathbb{R}$.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} \cos(3x) = 0 &\iff \cos(3x) = \cos(\pi/2) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 3x = \pi/2 + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x = -\pi/2 + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 3x = \pi/2 + k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \pi/6 + k\pi/3 \end{aligned}$$

- Maintenant, on cherche les entiers k tels que $\pi/6 + k\pi/3$ soit dans $[0, \pi]$.

Soit k un entier.

$$\begin{aligned} 0 \leq \pi/6 + k\pi/3 \leq \pi &\iff -\pi/6 \leq k\pi/3 \leq 5\pi/6 \\ &\iff -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{5}{2} \\ &\iff k \in \{0, 1, 2\} \quad (\text{car } k \text{ est entier}) \end{aligned}$$

$$S_{(E_5)} = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

6) Soit (E_6) : $\sin(4x + \pi/3) = 1$ sur $[-\pi, \pi]$.

- Tout d'abord, nous allons résoudre (E_6) sur $\mathbb{R}$.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} \sin(4x + \pi/3) = 1 &\iff \sin(4x + \pi/3) = \sin(\pi/2) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 4x + \pi/3 = \pi/2 + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 4x + \pi/3 = \pi - \pi/2 + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 4x + \pi/3 = \pi/2 + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \pi/24 + k\pi/2 \quad (\text{car } k \text{ est entier}) \end{aligned}$$

- Maintenant, on cherche les entiers k tels que $\pi/24 + k\pi/2$ soit dans $[-\pi, \pi]$.

Soit k un entier.

$$\begin{aligned} -\pi \leq \pi/24 + k\pi/2 \leq \pi &\iff -25\pi/24 \leq k\pi/2 \leq 23\pi/24 \\ &\iff -25/12 \leq k \leq 23/12 \\ &\iff k \in \{-2, -1, 0, 1\} \end{aligned}$$

$$S_{(E_6)} = \left\{ -\frac{23\pi}{24}, -\frac{13\pi}{24}, \frac{\pi}{24}, \frac{13\pi}{24} \right\}$$

Correction de l'exercice 20. Un peu de tout... mais en trigonométrie!

1) Montrons que, quand cela a un sens, $\frac{\cos(2t)}{1 - \sin(2t)} = \frac{\cos(t) + \sin(t)}{\cos(t) - \sin(t)}$ (on pourra remplacer 1 par $\cos^2(t) + \sin^2(t)$) et déterminons l'ensemble de définition de cette formule.

- La formule ci-dessus a du sens si et seulement si t est un réel tel que $\sin(2t) \neq 1$ et $\cos(t) \neq \sin(t)$.

Pour cela, déterminons les réels t tels que $\sin(2t) = 1$ ou $\cos(t) = \sin(t)$.

Pour tout t réel, on a

$$\begin{aligned} \sin(2t) = 1 &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 2t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad t = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \cos(t) = \sin(t) &\iff \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(t) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(t) = 0 \\ &\iff \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(-t) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(-t) = 0 \\ &\iff \sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = 0 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{4} - t = k\pi. \end{aligned}$$

et en particulier, on peut remarquer que $\sin(2t) \neq 1 \iff \cos(t) \neq \sin(t)$.

La formule a du sens pour les réels t appartenant à $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

- Soit t un réel appartenant à $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$\begin{aligned} \frac{\cos(2t)}{1 - \sin(2t)} &= \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t - 2 \sin t \cos t} \\ &= \frac{(\cos t - \sin t)(\cos t + \sin t)}{(\cos t - \sin t)^2} \\ &= \frac{\cos(t) + \sin(t)}{\cos t - \sin t} \end{aligned}$$

$$\text{Pour tout réel } t \text{ appartenant à } \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \frac{\cos(2t)}{1 - \sin(2t)} = \frac{\cos(t) + \sin(t)}{\cos(t) - \sin(t)}.$$

2) Montrons que $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.

On écrit $\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ et de ce fait, on a

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

d'où $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$

3) (a) • Pour tous réels a et b , $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

- Soit p et q des réels.

On remarque que $p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}$ et $q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}$.

Pour $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$ dans les relations précédentes, on trouve $p = a+b$ et $q = a-b$ et

$$\cos p = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \text{et} \quad \cos q = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

En sommant les deux relations ci-dessus, on obtient $\cos p + \cos q = 2 \cos a \cos b$ soit $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

Pour tous réels p et q , $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

(b) Application : Soit a, b et c des réels. D'après la question 3.(a), on a

$$\begin{aligned} & \cos(a+b+c) + \cos(a+b-c) + \cos(a-b+c) + \cos(-a+b+c) \\ = & 2 \cos\left(\frac{a+b+c+a+b-c}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b+c-a-b+c}{2}\right) + 2 \cos\left(\frac{a-b+c-a+b+c}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b+c+a-b-c}{2}\right) \\ = & 2 \cos(a+b) \cos c + 2 \cos c \cos(a-b) \\ = & 2 \cos c (\cos(a+b) + \cos(a-b)) \\ = & 2 \cos c \times 2 \cos a \cos b \end{aligned}$$

Pour tous réels a, b, c , $\cos(a+b+c) + \cos(a+b-c) + \cos(a-b+c) + \cos(-a+b+c) = 4 \cos(a) \cos(b) \cos(c)$.

3.3 Correction sur les exercices sur la dérivation

Correction de l'exercice 21. Calcul de dérivées.

1) Soit $f_1 : x \mapsto (x^2 - 1)^3$

- f_1 est une fonction polynomiale donc $D_{f_1} = \mathbb{R}$.
- f_1 étant polynomiale, f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f'_1(x) = 6x(x^2 - 1)^2$.

2) Soit $f_2 : x \mapsto \frac{3x+1}{1-x}$.

- f_2 est un quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur s'annule uniquement en 1 donc $D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Par quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur s'annule uniquement en 1, f_2 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et

$$\text{pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R} \setminus \{1\}, f'_2(x) = \frac{4}{(1-x)^2}.$$

3) Soit $f_3 : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 5}$.

- f_3 est définie sur l'ensemble des réels x tels que $x^2 - 2x + 5 \geq 0$. Or, pour tout x réel, $x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4 > 0$ donc $D_{f_3} = \mathbb{R}$.
- On observe que $x \mapsto x^2 - 2x + 5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. De plus, la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \mapsto x^2 - 2x + 5$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc par composition de fonctions dérivables, f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f'_3(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.

4) Soit $f_4 : x \mapsto \sqrt[5]{x^2 + 1}$. On note que pour tout u réel positif, $\sqrt[5]{u} = u^{\frac{1}{5}}$.

- f_4 est définie sur l'ensemble des réels x tels que $x^2 + 1 \geq 0$. Or, pour tout x réel, $x^2 + 1 > 0$ donc $D_{f_4} = \mathbb{R}$.
- La fonction $u \mapsto \sqrt[5]{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc par composition de fonctions dérivables, f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f'_4(x) = \frac{2x}{5(x^2+1)^{4/5}}$.

5) Soit $f_5 : x \mapsto \sin(\frac{\pi}{6} - 2x)$.

- Les fonctions $\sin$ et $x \mapsto \frac{\pi}{6} - 2x$ sont définies sur $\mathbb{R}$ donc $D_{f_5} = \mathbb{R}$.
- Les fonctions $\sin$ et $x \mapsto \frac{\pi}{6} - 2x$ sont également dérivables sur $\mathbb{R}$ donc par composition de fonctions dérivables, f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f'_5(x) = -2\cos(\frac{\pi}{6} - 2x)$.

6) Soit $f_6 : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$.

- f_6 est définie sur l'ensemble des réels x tels que $x^2 + 1 > 0$ (ce qui est vraie pour tout x réel) donc $D_{f_6} = \mathbb{R}$.
- La fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc par composition de fonctions dérivables, f_6 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f'_6(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

7) Soit $f_7 : x \mapsto \ln(\ln x)$.

- f_7 est définie sur l'ensemble des réels x tels que $\ln x > 0$. Par stricte croissance de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et le fait que $\ln 1 = 0$, on en déduit que $D_{f_7} =]1, +\infty[$.
- La fonction $\ln$ (celle à l'extérieur de la composition) est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $\ln$ (celle à l'intérieur de la composition) est dérivable sur $]1, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc par composition de fonctions dérivables, f_7 est dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour tout x dans $]1, +\infty[$, $f'_7(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

8) Soit $f_8 : x \mapsto e^{x^2-x+1}$.

- Les fonctions $\exp$ et $x \mapsto x^2 - x + 1$ sont définies sur $\mathbb{R}$ donc $D_{f_8} = \mathbb{R}$.
- Les fonctions $\exp$ et $x \mapsto x^2 - x + 1$ sont également dérivables sur $\mathbb{R}$ donc par composition de fonctions dérivables, f_8 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f'_8(x) = (2x - 1)e^{x^2-x+1}$.

Correction de l'exercice 22. Dérivation d'une composée (très classique)

Soit $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

1) Montrons que f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ puis calculons f' .

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $1 + \frac{1}{x} > 0$ donc par composition, f est bien définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{(x+1)x^2} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}.$$

- 2) Notons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $x + 1 > 0$, $x^2 > 0$ et $e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $x - (1+x) \ln(1+x)$.

Ainsi, f' est du même signe que la fonction $h : x \mapsto x - (1+x) \ln(1+x)$.

Étudions alors le signe de h sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par composition de fonctions dérivables, h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $h'(x) = -\ln(1+x) \leq 0$ car $x > 0$ et $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

De ce fait, h est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et par opérations sur les limites, $\lim_{x \rightarrow 0} h = 0$.

Or, par le théorème de la limite monotone, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} h$ d'où pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $h(x) \leq 0$.

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

- 3) Déterminons la limite de f en 0.

Pour x proche de 0, on a :

$$f(x) = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (limite usuelle par taux d'accroissement) et que $\exp$ est continue en 1 donc par composition de limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f \text{ existe et vaut } e.$$

3.4 Correction des exercices sur les primitives

Correction de l'exercice 23. Primitives.

Dans toute la suite, F désignera une primitive de f si celle-ci en admet au moins une.

- 1) Soit $f : x \mapsto 45x^8 + 6x^2 - 18x + 7$. $F : x \mapsto 5x^9 + 2x^3 - 9x^2 + 7x$.
- 2) Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$. $F : x \mapsto \ln|x| + \frac{1}{x}$.
- 3) Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$. $F : x \mapsto -\ln(|1-x|)$.
- 4) Soit $f : x \mapsto \frac{1}{(2x+1)^3}$. $F : x \mapsto -\frac{1}{4(2x+1)^2}$.
- 5) Soit $f : x \mapsto x(2x^2 + 1)^4$. $F : x \mapsto \frac{1}{20}(2x^2 + 1)^5$.
- 6) Soit $f : x \mapsto \sqrt{x} + 1$. $F : x \mapsto \frac{2}{3}x^{3/2} + x$.
- 7) Soit $f : x \mapsto \sin(2x)$. $F : x \mapsto -\frac{1}{2}\cos(2x)$.
- 8) Soit $f : x \mapsto \frac{x}{(x^2+2)^2}$. $F : x \mapsto -\frac{1}{2(x^2+2)}$.
- 9) Soit $f : x \mapsto xe^{x^2}$. $F : x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2}$.
- 10) Soit $f : x \mapsto \frac{\sin x}{2+3\cos x}$. $F : x \mapsto -\frac{1}{3}\ln|2+3\cos(x)|$.
- 11) Soit $f : x \mapsto \frac{\sin(\ln x)}{x}$. $F : x \mapsto -\cos(\ln(x))$.
- 12) Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$. $F : x \mapsto \ln(|\ln(x)|)$.

Correction de l'exercice 24. Primitivation par parties.

- 1) Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrons que uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

Soit a un réel de I . Montrons que uv est dérivable en a et que $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.

Pour tout x de I tel que $x \neq a$, on a

$$\begin{aligned} \frac{(uv)(x) - (uv)(a)}{x - a} &= \frac{u(x)v(x) - u(a)v(a)}{x - a} \\ &= \frac{(u(x) - u(a))v(x) + u(a)(v(x) - v(a))}{x - a} \\ &= \frac{u(x) - u(a)}{x - a} v(x) + u(a) \frac{v(x) - v(a)}{x - a} \end{aligned}$$

Comme v est dérivable en a , alors v est continue en a donc $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = v(a)$.

De plus, u et v sont dérivables en a donc $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} = u'(a)$ et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{v(x) - v(a)}{x - a} = v'(a)$.

Par opérations sur les limites finies, on obtient que $x \mapsto \frac{(uv)(x) - (uv)(a)}{x - a}$ admet une limite finie en a qui vaut $u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.

Ainsi, on a prouvé que uv est dérivable en a et que $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.

$$uv \text{ est dérivable sur } I \text{ et } (uv)' = u'v + uv'.$$

- 2) Montrons que $f : x \mapsto xe^x$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

On pose $v : x \mapsto x$ et $u : x \mapsto e^x$ de sorte que u et v soient dérivables sur $\mathbb{R}$ et $f = u'v$.

D'après la question précédente, on a $f = (uv)' - uv'$ soit pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = (uv)'(x) - e^x$.

Or, $x \mapsto e^x$ est une primitive de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$ donc par somme de primitives, $x \mapsto (uv)(x) - e^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$$x \mapsto xe^x \text{ admet des primitives sur } \mathbb{R} \text{ et l'ensemble de ses primitives sur } \mathbb{R} \text{ est } \{x \mapsto xe^x - e^x + C \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

- 3) Montrons que $f : x \mapsto x^{2024} \ln(x)$ admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ que l'on déterminera.

On pose $v : x \mapsto \frac{x^{2025}}{2025}$ et $u : x \mapsto \ln(x)$ de sorte que u et v soient dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f = u'v$.

D'après la question précédente, on a $f = (uv)' - uv'$ soit pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = (uv)'(x) - \frac{x^{2024}}{2025}$.

Or, $x \mapsto \frac{x^{2025}}{(2025)^2}$ est une primitive de $x \mapsto \frac{x^{2024}}{2025}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par somme de primitives, $x \mapsto (uv)(x) - \frac{x^{2025}}{(2025)^2}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$x \mapsto x^{2024} \ln(x) \text{ admet des primitives sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et l'ensemble de ses primitives sur } \mathbb{R}_+^* \text{ est } \left\{ x \mapsto \frac{x^{2025}}{2025} \ln(x) - \frac{x^{2025}}{(2025)^2} + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

3.5 Correction des exercices sur le calcul intégral

Correction de l'exercice 25. Utilisations du théorème fondamental.

- 1) On a $\int_0^2 (t^2 - t + 1) dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t \right]_0^2$ soit $\int_0^2 (t^2 - t + 1) dt = \frac{8}{3}$.
- 2) On a $\int_0^{\pi/2} \cos(2t) dt = \left[\frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\pi/2}$ soit $\int_0^{\pi/2} \cos(2t) dt = 0$.
- 3) On a $\int_0^\pi \sin\left(\frac{t}{3}\right) dt = [-3 \cos(t/3)]_0^\pi$ donc $\int_0^\pi \sin\left(\frac{t}{3}\right) dt = \frac{3}{2}$.
- 4) On a $\int_0^1 te^{4t^2} dt = \left[\frac{e^{4t^2}}{8} \right]_0^1$ soit $\int_0^1 te^{4t^2} dt = \frac{e^4 - 1}{8}$.
- 5) On a $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_1^2$ soit $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2(\sqrt{2} - 1)$.
- 6) On a $\int_0^1 \frac{1}{(t+1)^2} dt = \left[-\frac{1}{t+1} \right]_0^1$ donc $\int_0^1 \frac{1}{(t+1)^2} dt = \frac{1}{2}$.
- 7) On a $\int_0^1 \frac{1}{(2t+3)^3} dt = \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{(2t+3)^2} \right]_0^1$ donc $\int_0^1 \frac{1}{(2t+3)^2} dt = \frac{4}{225}$.
- 8) On a $\int_1^2 \frac{dt}{t} = [\ln(|t|)]_1^2$ soit $\int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln(2)$.
- 9) On a $\int_{-2}^{-1} \frac{dt}{t} = [\ln(|t|)]_{-2}^{-1}$ soit $\int_{-2}^{-1} \frac{dt}{t} = -\ln(2)$.
- 10) On a $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{1 + \cos(t)} dt = [-\ln(1 + \cos(t))]_0^{\pi/2}$ soit $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{1 + \cos(t)} dt = \ln(2)$.
- 11) On a $\int_0^1 \frac{e^{2t}}{3e^{2t} + 1} dt = \left[\frac{1}{6} \ln(3e^{2t} + 1) \right]_0^1$ soit $\int_0^1 \frac{e^{2t}}{3e^{2t} + 1} dt = \frac{\ln(3e^2 + 1) - \ln(4)}{6}$.
- 12) On a $\int_1^2 \frac{1}{t(\ln(t) + 1)} dt = [\ln(\ln(t) + 1)]_1^2$ donc $\int_1^2 \frac{1}{t(\ln(t) + 1)} dt = \ln(\ln(2) + 1)$.

Correction de l'exercice 26. Utilisations d'une intégration par parties.

- 1) Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 te^t dt &= [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt \\ &= e - [e^t]_0^1 \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\int_0^1 te^t dt = 1$.

- 2) Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln(t) dt &= [t \ln(t)]_1^2 - \int_1^2 t \times \frac{1}{t} dt \\ &= 2 \ln(2) - [t]_1^2 \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve $\int_1^2 \ln(t) dt = 2 \ln(2) - 1$.

- 3) Par intégration par parties, on trouve $\int_0^1 t \sin(t) dt = \sin(1) - \cos(1)$.

- 4) Par intégration par parties, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^1 t\sqrt{1+t} dt &= \left[\frac{2}{3} t(1+t)^{3/2} \right]_0^1 - \frac{2}{3} \int_0^1 (1+t)^{3/2} dt \\ &= \frac{2 \times 2^{3/2}}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} [(1+t)^{5/2}]_0^1 \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4 \times (2^{5/2} - 1)}{15} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4 \times (4\sqrt{2} - 1)}{15} \end{aligned}$$

Ainsi, $\int_0^1 t\sqrt{1+t} dt = \frac{4(1+\sqrt{2})}{15}$.

5) Par double intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^2 e^t dt &= [t^2 e^t]_0^1 - 2 \int_0^1 t e^t dt \\ &= e - 2 \left([t e^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt \right) \\ &= e - 2(e - [e^t]_0^1) \\ &= e - 2(e - e + 1)\end{aligned}$$

Ainsi, on a $\boxed{\int_0^1 t^2 e^t dt = e - 2.}$

6) Par double intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^t \cos(t) dt &= [e^t \cos(t)]_0^1 + \int_0^1 e^t \sin(t) dt \\ &= e \cos(1) - 1 + [e^t \sin(t)]_0^1 - \int_0^1 e^t \cos(t) dt\end{aligned}$$

Ainsi, $\int_0^1 e^t \cos(t) dt = e(\cos(1) + \sin(1)) - 1 - \int_0^1 e^t \cos(t) dt$ d'où $\boxed{\int_0^1 e^t \cos(t) dt = \frac{e(\cos(1) + \sin(1)) - 1}{2}.}$

Correction de l'exercice 27. Étude d'une suite d'intégrales.

On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 t^n e^t dt.$$

1) Soit n un entier naturel. Par produit de fonctions continues, la fonction $t \mapsto t^n e^t$ est continue sur $[0, 1]$ donc I_n existe.

$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bien définie.}}$

2) Montrons que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Soit n un entier naturel. Comparons I_n et I_{n+1} .

$$\begin{aligned}I_n - I_{n+1} &= \int_0^1 (t^n e^t - t^{n+1} e^t) dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ &= \int_0^1 t^n (1 - t) e^t dt\end{aligned}$$

Pour tout t de $[0, 1]$, on a $t^n \geq 0$, $1 - t \geq 0$ et $e^t > 0$ donc par produit, $t^n (1 - t) e^t \geq 0$ et par positivité de l'intégrale, on a $I_n - I_{n+1} \geq 0$.

$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

3) Montrons que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Soit n un entier naturel. Par croissance de $\exp$ sur $[0, 1]$, on a pour tout t de $[0, 1]$, $0 \leq t^n e^t \leq t^n e$.

Par croissance de l'intégrale, on a $I_n \leq e \int_0^1 t^n dt$ soit $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n+1} = 0$, on obtient par théorème d'encadrement que $\boxed{(I_n) \text{ converge vers } 0.}$

4) Soit n un entier naturel. Trouvons une relation entre I_{n+1} et I_n .

Par intégration par parties, on a :

$$I_{n+1} = [t^{n+1} e^t]_0^1 - \int_0^1 (n+1) t^n e^t dt$$

Ainsi, on trouve $\boxed{\text{pour tout } n \text{ entier naturel, on a } I_{n+1} = e - (n+1)I_n.}$

5) D'après la question 4), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e - nI_n = I_{n+1} + I_n.$$

D'après 3), (I_n) et (I_{n+1}) convergent vers 0 donc par opérations sur les suites convergentes, $\lim_{n \rightarrow \infty} (e - nI_n) = 0$ soit $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = e.}$