

CPGE ECG
Mathématiques approfondies

Cahier de calculs

Rappels de cours et exercices

Contact : robert.thai@gmx.fr

Introduction

L'enseignement des mathématiques constitue une part importante du programme en ECG.

Il se répartit comme suit :

- 7 heures de cours ;
- 2 heures de TD ;
- 1 heure de TP informatique avec le langage Python

auxquels viendront se rajouter 1 heure de colle toutes les deux semaines, au moins 6 devoirs surveillés de 4 heures ainsi que des devoirs maisons et des interrogations de cours.

Contrairement aux épreuves du lycée, les calculatrices sont interdites à tous les concours d'entrée dans les grandes écoles de commerce et aucun formulaire n'est autorisé ni mis à disposition. Il en sera donc de même pendant les deux années de préparation à ces concours.

Afin de préparer au mieux la rentrée, je vous propose de travailler ce document sur lesquels vous pourrez trouver des rappels de notions vues au lycée et plusieurs exercices pour s'entraîner et se renforcer en calculs.

Ce document étant relativement récent, merci de me signaler par mail toute coquille ou erreur.

Pour mieux vous connaître, un petit devoir de calculs vous attendra le vendredi de la rentrée ☺

Par ailleurs, aucun livre n'est demandé pour cette année : je vous distribuerai au fur et à mesure les documents nécessaires.

★ ★ ★

Bonnes vacances !

Rendez-vous à la rentrée !

★ ★ ★

Table des matières

1	Calculs sur les réels	3
1.1	Fractions	3
1.2	Puissances	4
1.3	Développer et factoriser	4
1.4	Identités remarquables	5
1.5	Racines carrées	5
1.6	Inégalités	6
1.7	Exercices sur les réels	8
2	Résolutions d'équations et inéquations	10
2.1	Équations	10
2.2	Exercices sur les équations	13
2.3	Inéquations	14
2.4	Exercices sur les inéquations	15
3	Calculs sur les fonctions	16
3.1	Logarithmes et exponentielles	16
3.2	Exercices sur logarithmes et exponentielles	19
3.3	Trigonométrie	20
3.4	Exercices sur la trigonométrie	22
3.5	Dérivation	24
3.6	Exercices sur la dérivation	25
3.7	Primitives	27
3.8	Exercices sur les primitives	28
3.9	Calcul intégral	29
3.10	Exercices sur le calcul intégral	31

1 Calculs sur les réels

1.1 Fractions

Méthode 1 (Opérations sur les fractions)

- **Bien définir une fraction** : le quotient $\frac{a}{b}$ existe si et seulement si a et b existent et b est différent de 0.
- **Simplifier une fraction** : si a , b et c sont des nombres avec b et c non nuls, alors $\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$.
- **Additionner (ou soustraire) des fractions** : si a , b , c et d sont des nombres avec b et d non nuls, alors $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$.
- **Multiplier ou diviser des fractions** : sous réserve d'existence des fractions suivantes, on a

$$\text{i) } \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

$$\text{ii) } \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}$$

$$\text{iii) } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

La relation iii) peut se résumer en la phrase "diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse".

Définition 2 (Fraction irréductible)

On dit qu'une fraction (d'entiers) est irréductible si les numérateur et dénominateur n'ont pas de diviseur positif commun autre que 1.

Exemple 1. $\frac{6}{25}$ est irréductible car les diviseurs positifs de 6 sont 1, 2, 3 et 6 tandis que les diviseurs positifs de 25 sont 1, 5 et 25.

Exemple 2. $\frac{2}{18}$ n'est pas irréductible (car 2 est un diviseur positif commun autre que 1 des numérateur et dénominateur).

Méthode 3 (Réduire au même dénominateur)

La relation $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$ n'est pas toujours efficace lorsque b et d sont des entiers présentant des facteurs communs. En effet, si on veut déterminer la forme irréductible de la fraction $\frac{1}{18} - \frac{1}{12}$, la formule nous fait calculer le produit 18×12 ...

On utilise alors la méthode suivante :

- 1) On décompose les dénominateurs des fractions en produit de facteurs premiers.
- 2) On cherche le dénominateur commun le plus petit (il s'agira du plus petit multiple commun des dénominateurs).
- 3) On réduit au même dénominateur.
- 4) On simplifie.

Exemple 3. Pour la fraction $\frac{1}{18} - \frac{1}{12}$, la méthode s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{18} - \frac{1}{12} &= \frac{1}{2 \times 3^2} - \frac{1}{2^2 \times 3} && \text{(étape 1)} \\ &= \frac{2}{2^2 \times 3^2} - \frac{3}{2^2 \times 3^2} && \text{(étape 2)} \\ &= \frac{2-3}{2^2 \times 3^2} && \text{(étape 3)} \\ &= -\frac{1}{36} && \text{(étape 4)} \end{aligned}$$

1.2 Puissances

Définition 4 (Puissance d'un réel)

Soit x un réel et n un entier naturel. On définit $x^n = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_n$ et par convention, $x^0 = 1$.

Exemple 4. Soit x un réel. On a $x^2 = x \times x$, $x^3 = x \times x \times x$.

Pour $x = 2$, on a $2^3 = 2 \times 2 = 2$ soit $2^3 = 8$.

Proposition 5 (Propriétés sur les puissances)

Soit x et y deux réels non nuls, n et m deux entiers relatifs.

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1) $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ | 4) $(x \times y)^n = x^n \times y^n$ |
| 2) $x^n \times x^m = x^{n+m}$ | 5) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ |
| 3) $(x^n)^m = x^{n \times m}$ | 6) $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$. |

Exemple 5. Soit x un réel non nul. Alors $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ ou encore $x^{-2} = \frac{1}{x \times x}$.

Exemple 6. Soit $A = \frac{2^2 \times 3^2}{2 \times 3^5}$. Alors $A = 2^{2-1}3^{2-5}$ soit $A = \frac{2}{3^3}$ donc $A = \frac{2}{27}$.

1.3 Développer et factoriser

Proposition 6 (Développer un produit)

Soit a, b, c et d des réels.

- 1) $a(b + c) = ab + ac$
- 2) $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Exemple 7. Soit x un réel. On pose $A = 4(2x - 3)$. On développe A et on trouve $A = 8x - 12$.

Exemple 8. Soit x un réel. On pose $B = (x - 2)(2x + 1)$. On développe B et on trouve $B = 2x^2 - 3x - 2$.

Corollaire 7 (Factoriser une somme)

Soit a, b et c des réels. Alors $ab + ac = a(b + c)$.

Exemple 9. Soit x un réel. On pose $C = 2x^2 - 4x$. On factorise C par $2x$ et on trouve $C = 2x(x - 2)$.

Exemple 10. Soit x un réel. On pose $D = (3x + 2)(x - 3) - (x - 2)(2x - 6)$.

On observe que $D = (3x + 2)(x - 3) - (x - 2) \times 2 \times (x - 3)$.

On peut alors factoriser D par $x - 3$ et on trouve $D = (x - 3)((3x + 2) - 2(x - 2))$ soit $D = (x - 3)(x + 6)$.

1.4 Identités remarquables

Proposition 8 (Identités remarquables)

Soit a et b des réels.

$$1) (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2) (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3) (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Exemple 11. Soit x un réel. On pose $A = (2x + 3)^2$. On développe A grâce à l'identité remarquable 1) et on trouve $A = 4x^2 + 12x + 9$.

Exemple 12. Soit x un réel. On pose $B = (3x - 4)^2$. On développe B grâce à l'identité remarquable 2) et on obtient $B = 9x^2 - 24x + 16$.

Exemple 13. Soit x un réel. On pose $C = (2x + 1)(2x - 1)$. On développe C suivant l'identité remarquable 3) et on a $C = 4x^2 - 1$.

Corollaire 9 (Factoriser à l'aide d'une identité remarquable)

Soit a et b des réels.

$$1) a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$2) a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$3) a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Exemple 14. Soit x un réel. On pose $A = 4x^2 - 12x + 9$. On reconnaît alors l'identité remarquable 2) et on trouve $A = (2x - 3)^2$.

Exemple 15. Soit x un réel. On pose $B = (2x + 1)^2 - (x - 1)^2$.

On reconnaît l'identité remarquable 3) et on obtient $C = (2x + 1 + x - 1)(2x + 1 - (x - 1))$ soit $C = 3x(x + 2)$.

1.5 Racines carrées

Définition 10 (Racine carrée d'un réel positif)

Soit a un réel positif. On note $\sqrt{a}$ l'unique réel positif dont le carré vaut a .

Autrement dit, pour tout réel x positif, on a $x^2 = a \iff x = \sqrt{a}$.

Exemple 16. • $\sqrt{0} = 0$

$$\bullet \sqrt{4} = 2$$

$$\bullet \sqrt{16} = 4$$

$$\bullet \sqrt{1} = 1$$

$$\bullet \sqrt{9} = 3$$

$$\bullet \sqrt{25} = 5.$$

Proposition 11 (Propriétés des racines carrées)

Soit a et b deux réels positifs.

$$1) (\sqrt{a})^2 = a$$

$$2) \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$3) \text{ Si } b \text{ est non nul, alors } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

$$4) \text{ Pour tout } x \text{ réel, on a } x^2 = a \iff (x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}).$$

Exemple 17. On veut écrire les réels suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a un réel et b un entier le plus petit possible :

- Soit $A = \sqrt{20}$. Alors $A = \sqrt{4 \times 5}$ donc $A = \sqrt{4}\sqrt{5}$ d'où $A = 2\sqrt{5}$.
- Soit $B = \sqrt{\frac{18}{25}}$. Alors $B = \sqrt{\frac{2 \times 3^2}{5^2}}$ donc $B = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3^2}}{\sqrt{5^2}}$ d'où $B = \frac{3}{5}\sqrt{2}$.

Exemple 18. On veut simplifier les produits suivants :

- Soit $A = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$. Alors $A = (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} + (\sqrt{3})^2$ soit $A = 5 - 2\sqrt{6}$.
- Soit $B = (2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})$. Alors $B = 2^2 - (\sqrt{5})^2$ soit $B = -1$.
- Soit $C = \sqrt{1 + \frac{3}{5}}\sqrt{1 - \frac{3}{5}}$.

Alors $C = \sqrt{\left(1 + \frac{3}{5}\right)\left(1 - \frac{3}{5}\right)}$ soit $C = \sqrt{1^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}$ ce qui s'écrit $C = \sqrt{1 - \frac{9}{25}}$ ou encore $C = \sqrt{\frac{16}{25}}$ soit $C = \frac{4}{5}$.

Méthode 12 (Multiplier par la quantité conjuguée)

Soit a et b deux réels positifs. On appelle **quantité conjuguée** de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ (resp. $\sqrt{a} - \sqrt{b}$) le réel $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ (resp. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$).

Si on veut éliminer les racines carrées d'une fraction de la forme $\frac{c}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ avec c un réel, il suffit de multiplier cette fraction au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur.

- 1) Si a et b sont différents et non tous nuls, $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ est bien définie et en multipliant par la quantité conjuguée, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} &= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} \\ &= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}.\end{aligned}$$

- 2) Si a et b sont différents et non tous nuls, $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ est bien définie et en multipliant par la quantité conjuguée, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}.\end{aligned}$$

Exemple 19. On veut réécrire les expressions suivantes sans racine au dénominateur.

- Soit $A = \frac{3}{\sqrt{5} + 1}$. On multiplie par la quantité conjuguée du dénominateur et on obtient $A = \frac{3(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5})^2 - 1^2}$ soit $A = \frac{3\sqrt{5} - 3}{4}$.
- Soit $B = \frac{1 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$. Par la même méthode, on obtient $B = \frac{(1 + \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}{3^2 - (\sqrt{5})^2}$ soit $B = \frac{3 + \sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 5}{4}$ d'où $B = 2 + \sqrt{5}$.

1.6 Inégalités

Définition 13 (Inégalité entre deux réels)

Soit x et y deux réels. On dit que x est inférieur ou égal à y (et on note $x \leq y$) si la représentation de x sur la droite réelle est située à gauche de celle de y . Autrement dit, $x \leq y$ si et seulement si $0 \leq y - x$ (ou encore $x - y \leq 0$).

Proposition 14 (Inégalités et opérations)

Soit x, y, z et t des réels.

- 1) **Conservation des inégalités par somme.** Si $x \leq y$ et $z \leq t$ alors $x + z \leq y + t$.
- 2) **Conservation des inégalités par multiplication par un réel positif.** Si λ est un réel positif et si $x \leq y$ alors $\lambda x \leq \lambda y$.
- 3) **Changement d'inégalités par multiplication par un réel négatif.** Si λ est un réel négatif et si $x \leq y$ alors $\lambda y \leq \lambda x$.

Exemple 20. Soit x un réel tel que $-1 \leq x \leq 2$.

- Encadrons $2x - 3$. Puisque $2 \geq 0$, on a $-2 \leq 2x \leq 4$ donc $-2 - 3 \leq 2x - 3 \leq 4 - 3$ soit $-5 \leq 2x - 3 \leq 1$.
- Encadrons $7 - 5x$. Puisque $-5 \leq 0$, on a $-10 \leq -5x \leq 5$ donc $7 - 10 \leq 7 - 5x \leq 7 + 5$ soit $-3 \leq 7 - 5x \leq 12$.

Proposition 15 (Inégalités et fonctions monotones)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I et x, y deux réels dans I .

- 1) Si f est croissante et si $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$.
- 2) Si f est décroissante et si $x \leq y$ alors $f(y) \leq f(x)$.

Exemple 21. Soit x un réel tel que $-1 \leq x \leq 2$.

- Encadrons $2x - 3$ par une autre méthode.

La fonction $f : t \mapsto 2t - 3$ est affine de coefficient directeur positif donc f est croissante d'où $f(-1) \leq f(x) \leq f(2)$ soit $-5 \leq 2x - 3 \leq 1$.

- Encadrons $7 - 5x$ par une autre méthode.

La fonction $g : t \mapsto 7 - 5t$ est affine de coefficient directeur négatif donc g est décroissante d'où $g(2) \leq g(x) \leq g(-1)$ soit $-3 \leq 7 - 5x \leq 12$.

Exemple 22. Soit x un réel tel que $1 \leq x \leq 3$.

- Encadrons $2x^2 - 3$. Par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$ et sachant que $1 \leq x \leq 3$, on a $1^2 \leq x^2 \leq 3^2$ soit $1 \leq x^2 \leq 9$ donc $2 - 3 \leq 2x^2 - 3 \leq 18 - 3$ soit $-1 \leq 2x^2 - 3 \leq 15$.
- Encadrons $\frac{4}{x} - 1$. La fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sachant que $1 \leq x \leq 3$, on a $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{1}$ soit $\frac{4}{3} - 1 \leq \frac{4}{x} - 1 \leq 4 - 1$ d'où $\frac{1}{3} \leq \frac{4}{x} - 1 \leq 3$.

Définition 16 (Valeur absolue d'un réel)

Soit x un réel. On appelle valeur absolue de x le réel noté $|x|$ définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En particulier, $|x| = \max(x, -x)$ (le plus grand réel parmi x et $-x$).

Proposition 17 (Propriétés de la valeur absolue)

- 1) Pour tout x réel, on a $|x| \geq 0$.
- 2) Pour tout x réel, on a $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- 3) Pour tous réels x et y , on a $|xy| = |x||y|$.
- 4) Pour tous réels x et y , on a $|x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).
- 5) Soit x un réel et a un réel positif. Alors $|x| = a$ si et seulement si $x = a$ ou $x = -a$.
- 6) Soit x un réel et a un réel positif. Alors $|x| \leq a$ si et seulement si $-a \leq x \leq a$.
- 7) Soit x un réel et a un réel positif. Alors $|x| \geq a$ et seulement si $x \geq a$ ou $x \leq -a$.
- 8) Pour tous réels x et y , on a $|x| = |y|$ si et seulement si $x = y$ ou $x = -y$.

Exemple 23. Soit x un réel.

- 1) On a $|x - 1| \leq 3$ si et seulement si $-3 \leq x - 1 \leq 3$ c'est-à-dire $-2 \leq x \leq 4$.
- 2) Montrons que $|x| \leq |x - 1| + 1$.
On écrit $|x| = |(x - 1) + 1|$ et par inégalité triangulaire, on a $|x| \leq |x - 1| + |1|$ soit $|x| \leq |x - 1| + 1$.

1.7 Exercices sur les réels

Exercice 1. Fractions sous forme irréductible.

Mettre sous forme irréductible les fractions suivantes :

1) $A = \frac{12}{8}$

5) $E = 4 \times \frac{3}{64}$

8) $H = \frac{\frac{5}{3} - \frac{3}{5}}{\frac{20}{3} + \frac{7}{20}}$

2) $B = \frac{21}{49}$

6) $F = \frac{27}{3}$

9) $I = \frac{\frac{3}{13} + \frac{11}{5}}{\frac{1}{11} - \frac{5}{13}}$

3) $C = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

7) $G = \frac{\frac{9}{22}}{\frac{3}{11}}$

10) $J = \frac{5 \times \frac{3}{4} - \frac{4}{5}}{4 + 2 \times \frac{3}{11}}$

4) $D = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

Exercice 2. Calculs et puissances.

Soit a , b et c des réels non nuls. Simplifier et donner le résultat sous la forme d'un produit ou d'un quotient de puissances à exposants positifs :

1) $A = \frac{(a^{-1}b)^3}{(ab^{-2})^{-2}}$

4) $D = \frac{(ab^2)^{-2}c^3a^4}{b^2(-c)^6a^3}$

2) $B = \frac{(a^2b^3)^{-1}c^3}{a^{-1}b^{-2}}$

5) $E = \frac{-(-a^2b^3)^2(a^{-1}b^{-2})^2(-ab^{-2})}{a^3c^{-1}(ab^{-2}c^{-2})^4}$

3) $C = \frac{(-a)^3bc^{-4}}{b(-c)^5a^4}$

6) $F = \frac{(a^{-2}b)^4(-a^2b)^{-1}}{-(-ab^{-1})^{-3}}$

Exercice 3. Autour des identités remarquables.

1) Soit x et y deux réels. Développer les expressions suivantes :

a) $A = (x+1)^2$

f) $F = (2x-y)^2$

j) $J = \left(4x - \frac{y}{2}\right)^2$

b) $B = (x-1)^2$

g) $G = (3x+4y)^2$

k) $K = \left(\frac{x+2y}{3}\right)^2$

c) $C = (2x+1)^2$

h) $H = (-7x+2y)^2$

l) $L = \left(\frac{-x+3y}{5}\right)^2$

d) $D = (3x-2)^2$

e) $E = (1-x)^2$

i) $I = \left(\frac{x}{2} + y\right)^2$

2) Soit x et y deux réels. Factoriser les expressions suivantes :

a) $A = x^2 - 4$

e) $E = (x+2)^2 - (x-1)^2$

i) $I = (x+y)^2 - (x-y)^2$

b) $B = 16 - x^2$

f) $F = (2x-1)^2 - (x+3)^2$

j) $J = (2x+y)^2 - (2x-2y)^2$

c) $C = 4x^2 - 9$

g) $G = (2x+3)^2 - 9(x-1)^2$

k) $K = 25(-x+y)^2 - (2y+3x)^2$

d) $D = 2x^2 - 25$

h) $H = 4(x+3)^2 - 25(x+1)^2$

l) $L = 4(x-2y)^2 - 16(2x+y)^2$

Exercice 4. Un cas particulier de la formule de Bernoulli.

1) Soit a et b deux réels.

a) Montrer que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

b) Montrer que $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$ puis déterminer une factorisation de $a^4 - b^4$ par $a - b$ (cette factorisation doit ressembler à celle obtenue à la question 1.a)).

2) Soit x et y deux réels. Factoriser les expressions suivantes :

a) $A = x^3 - 1$

c) $C = 125x^3 - 1$

e) $E = x^3 + 8y^3$

g) $G = (xy)^4 - 1$

b) $B = 8 - x^3$

d) $D = \frac{x^3}{8} - 1$

f) $F = x^3y^3 + 1$

h) $H = 16x^4 - y^8$

Exercice 5. Racines carrées.

1) Écrire les réels suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a est un réel et b un entier supérieur à 2 qui soit le plus petit possible :

- a) $A = \sqrt{18}$;
 b) $B = \sqrt{24}$;
 c) $C = \sqrt{32}$;
 d) $D = \sqrt{50} + \sqrt{8}$;
 e) $E = \sqrt{48} - \sqrt{147}$;
 f) $F = \sqrt{\frac{28}{9}}$;
 g) $G = \sqrt{\frac{3}{4}}$;
 h) $H = \sqrt{\frac{32}{36}}$;
 i) $I = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{32}{9}}$;
 j) $J = \sqrt{\frac{3}{16}} - \sqrt{\frac{147}{25}}$.

2) Simplifier les expressions suivantes :

- a) $A = (\sqrt{2} + 1)^2$;
 b) $B = (\sqrt{3} - 1)^2$;
 c) $C = (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$;
 d) $D = (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})$;
 e) $E = (7 + \sqrt{2})(7 - \sqrt{2})$;
 f) $F = \sqrt{2 - \frac{1}{3}} \times \sqrt{2 + \frac{1}{3}}$;
 g) $G = \sqrt{\sqrt{5} - 1} \times \sqrt{1 + \sqrt{5}}$;
 h) $H = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$;
 i) $I = \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} - 1}$;
 j) $J = \frac{\sqrt{2} - 5}{2\sqrt{2} + 1}$.

 Exercice 6. Inégalités.

1) Soit x un réel compris entre 0 et 2. Donner un encadrement des expressions suivantes :

- a) $|x + 3|$;
 b) $3x - 7$;
 c) $-4x + 5$;
 d) $\frac{1}{x^2 + 1}$.

2) *Preuves d'inégalités.*

- a) Montrer que pour tout x réel positif, on a $\frac{x}{x^2 + 1} \leq x$.
 b) Montrer que pour tout x réel compris entre 2 et 5, on a $\frac{3}{2} \leq \frac{2x - 1}{x} \leq \frac{9}{5}$.
 c) Montrer que pour tout x réel compris entre 1 et 3, on a $|x^3 - 5x^2 + 11| \leq 33$.
 d) Montrer que pour tout x réel, on a $|x - 2| \leq |x - 1| + |2x - 3|$.

2 Résolutions d'équations et inéquations

2.1 Équations

Remarque 18 (Généralités sur les équations)

- On dit que deux équations (E) et (F) sont **équivalentes** si elle ont même ensemble de solutions. Dans ce cas, on note $(E) \iff (F)$.
- Soit (E) une équation.
 - Si on ajoute ou retranche un réel à l'équation (E) , l'équation obtenue est équivalente à (E) .
 - Si on multiplie par un réel non nul l'équation (E) , l'équation obtenue est équivalente à (E) .

Remarque 19 (Remarque très utile sur les réels)

Un produit de réels est nul si et seulement si au moins un des facteurs est nul.

Définition 20 (Équation du premier degré)

On appelle **équation du premier degré** toute équation de la forme $ax + b = 0$ avec a et b des réels connus où a est non nul et x est l'inconnue.

Proposition 21 (Résolution d'une équation du premier degré)

Soit a et b deux réels tels que a est non nul et (E) l'équation $ax + b = 0$.

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Autrement dit, (E) admet une unique solution qui est $-\frac{b}{a}$.

Exemple 24. • Soit (E) l'équation $2x - 3 = 0$. L'unique solution de (E) est $\frac{3}{2}$.

- Soit (F) l'équation $3x - 2 = x + 3$. Dans ce cas, $(F) \iff 2x - 5 = 0$ donc l'équation (F) admet une unique solution qui est $\frac{5}{2}$.

Exemple 25. • Soit (E) l'équation $(2x + 3)(3x - 1) = 0$. Comme un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul, on a $(E) \iff (2x + 3 = 0 \text{ ou } 3x - 1 = 0)$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right\}$.

- Soit (F) l'équation $(x + 2)(2x - 1) = (2x + 4)(2x + 1)$.

On observe que $(F) \iff (x + 2)(2x - 1) - 2(x + 2)(2x + 1) = 0$ et en factorisant le membre de gauche par $x + 2$, on trouve $(F) \iff (x + 2)((2x - 1) - 2(2x + 1)) = 0$ soit $(F) \iff (x + 2)(-2x - 3) = 0$. Comme un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul, l'ensemble des solutions de (F) est $\left\{-2, -\frac{3}{2}\right\}$.

Définition 22 (Équation du second degré)

On appelle **équation du second degré** toute équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a , b et c sont des réels connus avec a non nul, et x est l'inconnue.

Méthode 23 (Résolution par factorisation)

Soit a, b et c des réels avec a non nul et (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Si on peut trouver α et β des réels tels que pour tout x réel, $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ alors α et β sont les solutions (non nécessairement distinctes) de (E) .

Exemple 26. • Soit (E) l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$. On note que pour tout x réel, $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

Ainsi, $(E) \iff (x - 1)(x - 2) = 0$ donc l'ensemble des solutions de (E) est $\{1, 2\}$.

• Soit (F) l'équation $4x^2 - 4x + 1 = 0$. On note que pour tout x réel, $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$.

Ainsi, $(F) \iff (2x - 1)^2 = 0$ donc l'ensemble des solutions de (F) est $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

La méthode par factorisation est utile si l'on remarque une telle écriture. Si ce n'est pas le cas, on dispose du résultat général suivant.

Proposition 24 (Résolution des équations du second degré)

Soit a, b et c des réels avec a non nul et (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ (appelé discriminant de (E)).

1) Si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux solutions réelles qui sont $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

2) Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une unique solution réelle qui est $-\frac{b}{2a}$.

3) Si $\Delta < 0$, l'équation (E) n'admet pas de solution réelle.

Les nombres complexes ne sont pas au programme en ECG!

Exemple 27. • Soit (E) l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

Le discriminant de (E) vaut $(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$ donc (E) admet deux solutions réelles qui sont $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

• Soit (F) l'équation $4x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{9} = 0$.

Le discriminant de (F) vaut $\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} = 0$ donc en notant que $\frac{-\left(-\frac{4}{3}\right)}{2 \times 4} = \frac{1}{6}$, on a que (F) admet une unique solution qui est $\frac{1}{6}$.

• Soit (G) l'équation $x^2 + 2x + 3 = 0$. Le discriminant de (G) vaut $2^2 - 4 \times 3 = -8 < 0$ donc (G) n'admet pas de solution réelle.

Dans la suite de cette sous-section, nous regarderons des équations avec quotient.

Exemple 28. • Soit (E) l'équation $\frac{(-x+5)(3x+6)}{(x+1)(2x+3)} = 0$.

▷ L'équation (E) est définie sur $\{x \in \mathbb{R} : (x+1)(2x+3) \neq 0\}$.

Pour tout x réel, $(x+1)(2x+3) = 0 \iff x = -1$ ou $x = -\frac{3}{2}$ donc (E) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, -1\}$.

▷ Soit x un réel de $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, -1\}$.

$$\begin{aligned} \frac{(-x+5)(3x+6)}{(x+1)(2x+3)} = 0 &\iff (-x+5)(3x+6) = 0 \\ &\iff x = 5 \quad \text{ou} \quad x = -2 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) est $\{-2, 5\}$.

• Soit (F) l'équation $\frac{3x+1}{6-5x} = 2$.

▷ L'équation (F) est définie sur $\{x \in \mathbb{R} : 6-5x \neq 0\}$ donc (F) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{6}{5}\right\}$.

▷ Soit x un réel dans $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{6}{5} \right\}$.

$$\begin{aligned} \frac{3x+1}{6-5x} = 2 &\iff \frac{3x+1}{6-5x} = \frac{2(6-5x)}{6-5x} \\ &\iff \frac{3x+1-2(6-5x)}{6-5x} = 0 \\ &\iff \frac{13x-11}{6-5x} = 0 \\ &\iff 13x-11 = 0 \\ &\iff x = \frac{11}{13} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (F) est $\left\{ \frac{11}{13} \right\}$.

Exemple 29. • Soit (E) l'équation $\frac{2x^2-3x+1}{x^2-5x+6} = 0$.

▷ L'équation (E) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 = 0\}$.

Notons que pour tout x réel, $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ donc (E) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$.

▷ Soit x un réel de $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$.

$$\begin{aligned} \frac{2x^2-3x+1}{x^2-5x+6} = 0 &\iff 2x^2-3x+1 = 0 \\ &\iff (2x-1)(x-1) = 0 \quad (*) \\ &\iff x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = 1 \end{aligned}$$

À la ligne (*), si vous ne pensez pas à cette factorisation, vous pouvez résoudre l'équation $2x^2 - 3x + 1 = 0$ en passant par le discriminant et on retrouvera le même résultat.

• Soit (F) l'équation $\frac{2x-3}{x+1} = \frac{x+1}{x-2}$.

▷ L'équation (F) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

▷ Soit x un réel de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{x+1} = \frac{x+1}{x-2} &\iff \frac{(2x-3)(x-2) - (x+1)^2}{(x+1)(x-2)} = 0 \\ &\iff \frac{x^2-9x+5}{(x+1)(x-2)} = 0 \\ &\iff x^2-9x+5 = 0 \end{aligned}$$

L'équation $x^2 - 9x + 5 = 0$ a pour discriminant $9^2 - 4 \times 5 = 61 > 0$ donc admet deux solutions qui sont $\frac{9-\sqrt{61}}{2}$ et $\frac{9+\sqrt{61}}{2}$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de (F) est $\left\{ \frac{9-\sqrt{61}}{2}, \frac{9+\sqrt{61}}{2} \right\}$.

Exemple 30. Soit m un réel. On considère l'équation $(E_m) : (m+1)x^2 - 2x + m = 0$.

Discutons de la résolution de (E_m) suivant la valeur de m (notons $S_{(E_m)}$ l'ensemble des solutions réelles de (E_m)).

• L'équation (E_m) est du second degré si et seulement si $m+1 \neq 0$.

• Supposons $m+1 = 0$ c'est-à-dire $m = -1$. L'équation (E_m) s'écrit $-2x - 1 = 0$ qui a pour unique solution $-\frac{1}{2}$.

• Supposons $m \neq -1$. Le discriminant de (E_m) vaut $4 - 4m(m+1) = 4(1-m-m^2)$.

Dans ce cas, (E_m) admet au moins une solution réelle si et seulement si $-m^2 - m + 1 \geq 0$.

La fonction trinôme $t \mapsto -t^2 - t + 1$ admet pour discriminant $5 > 0$ donc admet deux racines réelles qui sont $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Ainsi, (E_m) admet au moins une solution réelle si et seulement si m appartient à $\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right]$.

▷ Si $m \in \left\{ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\}$ alors (E_m) admet une unique solution qui est $\frac{1}{m+1}$.

▷ Si $m \in]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}[$ alors (E_m) admet deux solutions réelles qui sont $\frac{2-2\sqrt{1-m-m^2}}{2(m+1)} = \frac{1-\sqrt{1-m-m^2}}{m+1}$ et $\frac{2+2\sqrt{1-m-m^2}}{2(m+1)} = \frac{1+\sqrt{1-m-m^2}}{m+1}$

$$S_{(E_m)} = \begin{cases} \left\{ -\frac{1}{2} \right\} & \text{si } m = -1 \\ \emptyset & \text{si } m \in]-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}[\cup]\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[\\ \left\{ \frac{1}{m+1} \right\} & \text{si } m \in \left\{ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\} \\ \left\{ \frac{1-\sqrt{1-m-m^2}}{m+1}, \frac{1+\sqrt{1-m-m^2}}{m+1} \right\} & \text{si } m \in]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}[\end{cases}$$

2.2 Exercices sur les équations

Exercice 7. Équations se ramenant à des équations du premier degré.

Résoudre les équations suivantes :

- | | |
|------------------------|---|
| 1) $2x - 3 = 7;$ | 4) $x(x - 1) = x(x + 2);$ |
| 2) $-x + 11 = 5x;$ | 5) $(2x - 5)(x + 2) = (4x + 8)(3x - 11);$ |
| 3) $3x - 2 = 2x + 11;$ | 6) $(3x + 3)^2(x - 3) = (x + 1)^2(2x - 5).$ |

Exercice 8. Equations de premier degré avec paramètre.

Soit $m \in \mathbb{R}$. Discuter de l'ensemble des solutions des équations suivantes suivant le paramètre m :

- | | |
|-------------------------|-------------------------------|
| 1) $mx + 7 = 5;$ | 3) $(m + 2)x - 4 = 2m;$ |
| 2) $(1 - m)x + 5 = 11;$ | 4) $(m^2 - 2m + 1)x + m = 1.$ |

Exercice 9. Équations du second degré ou équations s'y ramenant.

Résoudre les équations suivantes :

- | | |
|------------------------|--|
| 1) $x^2 + x - 6 = 0$ | 7) $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ |
| 2) $4x^2 - 2x + 1 = 0$ | 8) $(x + 1)^2 - 5(x + 1) + 6 = 0$ |
| 3) $x^2 - x - 1 = 0$ | 9) $(-2x + 1)^2 - 7(-2x + 1) + 12 = 0$ |
| 4) $x^2 + x + 1 = 0$ | 10) $x^4 - x^3 + x^2 = 0$ |
| 5) $2x^2 + x - 3 = 0$ | 11) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 = 0$ |
| 6) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ | 12) $11x^4 + 44x^3 + 44x^2 = 0$ |

Exercice 10. Equations du second degré avec paramètre.

Soit $m \in \mathbb{R}$. Discuter de l'ensemble des solutions des équations suivantes suivant le paramètre m :

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1) $mx^2 - 2x + 3m = 0$ | 4) $4x^2 + 2mx + (m - 1) = 0$ |
| 2) $x^2 + mx + 1 = 0$ | 5) $(4m + 3)x^2 + mx + \frac{1}{4} = 0$ |
| 3) $3x^2 + 2mx + (1 + m) = 0$ | 6) $(m - 2)x^2 + mx + 2 = 0$ |

Exercice 11. Relations entre coefficients et racines d'un trinôme.

Soit a, b, c des réels avec $a \neq 0$ et P la fonction trinôme définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = ax^2 + bx + c.$$

On suppose que x_1 et x_2 sont des racines **distinctes** de P c'est-à-dire que $P(x_1) = 0$, $P(x_2) = 0$ et $x_1 \neq x_2$.

- Montrer que pour tout x réel, on a $P(x) = (x - x_1)(a(x + x_1) + b)$ (on pourra exprimer $P(x) - P(x_1)$ en fonction de a, b, x et x_1).
- Montrer que pour tout x réel, on a $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Développer $(x - x_1)(x - x_2)$ pour tout x réel.
- Montrer que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

2.3 Inéquations

Proposition 25 (Résolution d'inéquations du premier degré)

Soit a et b des réels tels que a est non nul.

- 1) Si $a > 0$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $ax + b \leq 0$ (resp. $ax + b < 0$) est $\left] -\infty, \frac{b}{a} \right]$ (resp. $\left] -\infty, \frac{b}{a} \right[$).
- 2) Si $a < 0$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $ax + b \leq 0$ (resp. $ax + b < 0$) est $\left[\frac{b}{a}, +\infty \right[$ (resp. $\left[\frac{b}{a}, +\infty \right]$).

Exemple 31. • L'ensemble des solutions de l'inéquation $2x + 5 \leq 0$ est $\left] -\infty, -5/2 \right]$.

- L'ensemble des solutions de l'inéquation $-3x + 2 < 0$ est $]2/3, +\infty[$.

Proposition 26 (Résolution d'inéquations du second degré)

Soit a, b et c des réels tels que a est non nul. On note $\Delta = b^2 - 4ac$.

- 1) Si $\Delta < 0$, pour tout x réel, $ax^2 + bx + c$ est du même signe que a et n'est jamais nul.
- 2) Si $\Delta = 0$, pour tout x réel, $ax^2 + bx + c$ est du même signe que a et vaut 0 seulement pour $x = -\frac{b}{2a}$.
- 3) Supposons $\Delta > 0$. Notons x_1, x_2 les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $x_1 < x_2$.
 - ▷ Pour tout x de $\left] -\infty, x_1 \right[\cup \left] x_2, +\infty \right[$, $ax^2 + bx + c$ est du même signe que a .
 - ▷ Pour tout x de $]x_1, x_2[$, $ax^2 + bx + c$ est de signe opposé à a .

Autrement dit, la fonction trinôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est du même signe que a en dehors de ses racines et est de signe opposé à a entre ses racines.

Exemple 32. • Soit (E) l'inéquation $x^2 - 7x + 12 \leq 0$.

Les solutions de $x^2 - 7x + 12 = 0$ sont 3 et 4 (en passant par une factorisation ou par calcul du discriminant).

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est $[3, 4]$.

- Soit (F) l'inéquation $-2x^2 + 3x - 1 > 0$.

Les solutions de l'équation $-2x^2 + 3x - 1 = 0$ sont 1 et $\frac{1}{2}$ donc l'ensemble des solutions de (F) est $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$.

Méthode 27 (Résolution d'une équation rationnelle)

Pour résoudre une équation avec un quotient de polynômes,

- 1) on détermine l'ensemble de définition de l'inéquation (correspondant à l'ensemble des réels n'annulant pas le dénominateur);
- 2) on factorise le numérateur et on se ramène à un produit de polynôme de degré 1 ou de degré 2 (si c'est possible);
- 3) à l'aide d'un tableau de signes construit à part des termes du produit précédent, on peut trouver l'ensemble des solutions de l'inéquation de départ.

Exemple 33. • Soit (E) l'inéquation $\frac{x-2}{3-x} \leq 0$.

- ▷ L'inéquation (E) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

- ▷ On dresse le tableau de signe de la fonction $x \mapsto \frac{x-2}{3-x}$:

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x-2$	-	0	+	+
$3-x$	+	+	0	-
$\frac{x-2}{3-x}$	-	0	+	-

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est $]-\infty, 2] \cup]3, +\infty[$.

- Soit (F) l'inéquation $\frac{2-x}{x+1} > \frac{1}{2x-1}$.

▷ L'inéquation (F) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$.

▷ Soit x un réel de $\mathbb{R} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$.



Ne pas multiplier l'inéquation par les dénominateurs à cause des signes qu'ils peuvent avoir !

$$\begin{aligned} \frac{2-x}{x+1} > \frac{1}{2x-1} &\iff \frac{2-x}{x+1} - \frac{1}{2x-1} > 0 \\ &\iff \frac{(2-x)(2x-1) - (x+1)}{(x+1)(2x-1)} > 0 \\ &\iff \frac{-2x^2 + 4x - 3}{(x+1)(2x-1)} > 0 \end{aligned}$$

L'équation $-2x^2 + 4x - 3 = 0$ n'admet pas de solution réelle car son discriminant vaut $4^2 - 4 \times (-2) \times (-3) = -8 < 0$ donc $-2x^2 + 4x - 3 < 0$.

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-2x^2 + 4x - 3$	—	—	—	—
$x + 1$	—	0	+	+
$2x - 1$	—	—	0	+
$\frac{-2x^2 + 4x - 3}{(x+1)(2x-1)}$	—		+	—

Ainsi, l'ensemble des solutions de (F) est $]-1, \frac{1}{2}[$.

2.4 Exercices sur les inéquations



Exercice 12. Inéquations du premier degré ou s'y ramenant.

Résoudre les inéquations suivantes :

- 1) $2x + 1 \geq 3$;
- 2) $-3x + 1 \geq -4$;
- 3) $\frac{1}{x-2} \leq 3$;
- 4) $\frac{x+1}{x+2} \leq 1$;
- 5) $\frac{x+1}{-x+3} \leq 2$;
- 6) $\frac{x-2}{4x-4} \geq \frac{x-1}{x-2}$.



Exercice 13. Inéquations du second degré ou s'y ramenant.

Résoudre les inéquations suivantes :

- 1) $x^2 - 7x + 6 \leq 0$
- 2) $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$
- 3) $-x^2 + 4x - 1 \leq -x + 3$
- 4) $\frac{x+2}{x+1} \leq \frac{x+3}{x+4}$;
- 5) $\frac{2x-3}{x+1} \geq \frac{x+3}{x-2}$;
- 6) $\frac{x-3}{2x-1} \leq \frac{2x+1}{x+3}$.



Exercice 14. Inéquations avec paramètre.

Soit m un réel. Discuter de la résolution des inéquations suivantes en fonction des valeurs de m :

- 1) $mx + 3 \geq m^2$;
- 2) $(m^2 + 1)x - 7 \leq m$;
- 3) $(m+1)x^2 - mx + 11 \leq 2m$;
- 4) $x^2 - 2x + m^2 \leq 4$;

3 Calculs sur les fonctions

3.1 Logarithmes et exponentielles

Définition 28 (Fonction logarithme népérien)

On appelle fonction **logarithme népérien** (notée $\ln$) l'unique primitive de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1.

Dans ce cas, on note pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$.

De fait, la fonction $\ln$ vérifie les propriétés suivantes :

- 1) la fonction $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$;
- 2) la fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$;
- 3) $\ln(1) = 0$.

Proposition 29 (Propriétés du logarithme népérien)

- 1) Pour tous x et y de $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
- 2) Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- 3) Pour tous x de $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout n entier relatif, $\ln(x^n) = n \ln(x)$;

Exemple 34. On veut exprimer les réels suivants uniquement à l'aide de $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(5)$:

- Soit $A = \ln(16)$. On écrit $16 = 2^4$ donc par propriété de $\ln$, $A = 4 \ln(2)$.
- Soit $B = \ln(0,125)$. On écrit $0,125 = 5^3 \times 10^{-3}$ d'où $B = \ln(5^3) + \ln(10^{-3})$ soit $B = 3 \ln(5) - 3 \ln(5 \times 2)$ d'où $B = -3 \ln(2)$.
- Soit $C = \ln\left(\frac{1}{12}\right)$. Alors $C = -\ln(12)$ d'où $C = -\ln(3 \times 2^2)$ donc $C = -\ln(3) - 2 \ln(2)$.
- Soit $D = \ln(6,25)$ Alors $D = \ln(5^4 \times 10^{-2})$ soit $D = 4 \ln(5) - 2 \ln(5 \times 2)$ donc $D = 2 \ln(5) - 2 \ln(2)$.

Proposition 30 (Monotonie de la fonction $\ln$)

Pour tous x, y de $\mathbb{R}_+^*$, $(x < y \Rightarrow \ln(x) < \ln(y))$.

Autrement dit, la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a que pour tous x et y de $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) = \ln(y) \iff x = y$.

Exemple 35. • Soit (E) l'équation $\ln(2x - 3) = 0$.

▷ L'équation (E) est définie sur $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 3 > 0\}$, c'est-à-dire (E) est définie sur $]3/2, +\infty[$.

▷ Soit x un réel dans $]3/2, +\infty[$. Puisque $\ln(1) = 0$ et que $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\ln(2x - 3) = \ln(1) \iff 2x - 3 = 1$ ce qui équivaut à $x = 2$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est $\{2\}$.

• Soit (F) l'équation $\ln(4x - 1) = \ln(3 - 2x)$.

▷ L'équation (F) est définie sur $\{x \in \mathbb{R} : 4x - 1 > 0 \text{ et } 3 - 2x > 0\}$ c'est-à-dire (F) est définie sur $]1/4, 3/2[$.

▷ Soit x un réel de $]1/4, 3/2[$. Par stricte croissance de $\ln$, on a

$$\begin{aligned} \ln(4x - 1) = \ln(3 - 2x) &\iff 4x - 1 = 3 - 2x \\ &\iff x = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (F) est $\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

Exemple 36. • Soit (E) l'inéquation $\ln(3x + 2) \leq 0$.

▷ L'inéquation (E) est définie sur $\{x \in \mathbb{R} : 3x + 2 > 0\}$ donc (E) est définie sur $] -2/3, +\infty[$.

▷ Soit x un réel de $] -2/3, +\infty[$. Puisque $\ln(1) = 0$ et que $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned} \ln(3x + 2) \leq 0 &\iff \ln(3x + 2) \leq \ln(1) \\ &\iff 3x + 2 \leq 1 \\ &\iff x \leq -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est $\left] -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right]$.

• Soit (F) l'inéquation $\ln(2 - 3x) < \ln(2x + 1)$.

▷ L'inéquation (F) est définie sur $\{x \in \mathbb{R} : 2 - 3x > 0 \text{ et } 2x + 1 > 0\}$ donc (F) est définie sur $] -1/2, 2/3[$.

▷ Soit x un réel de $] -1/2, 2/3[$. Par stricte croissance de $\ln$, on a

$$\begin{aligned} \ln(2 - 3x) < \ln(2x + 1) &\iff 2 - 3x < 2x + 1 \\ &\iff 1 < 5x \\ &\iff x > \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (F) est $\left] \frac{1}{5}, \frac{2}{3} \right[$.

Corollaire 31 (Bijectivité du logarithme népérien)

La fonction $\ln$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$, c'est-à-dire pour tout y de $\mathbb{R}$ l'équation $y = \ln(x)$ admet une unique solution x dans $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 32 (Nombre d'Euler ou constante de Néper)

On note e l'unique réel x strictement positif tel que $\ln(x) = 1$.

Autrement dit, on a $\ln(e) = 1$ et pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $(\ln(x) = 1 \iff x = e)$.

Proposition – Définition 33 (Fonction exponentielle)

Soit x un réel. Il existe un unique z dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que $x = \ln(z)$. Dans ce cas, on note $z = \exp(x)$ et z est appelé exponentielle de x .

La fonction qui à tout x dans $\mathbb{R}$ associe $\exp(x)$ est appelée fonction exponentielle.

On note également pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x = \exp(x)$.

De la définition de la fonction exponentielle, découlent les propriétés suivantes :

- 1) $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.
- 2) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x > 0$.
- 3) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.

i. on peut prouver par des arguments de continuité que cette notation est compatible avec le passage à la puissance

Proposition 34 (Propriétés de la fonction exponentielle)

- 1) Pour tous x et y de $\mathbb{R}$, $e^{x+y} = e^x \times e^y$.
- 2) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.
- 3) Pour tout x de $\mathbb{R}$ et pour tout n entier relatif, $e^{nx} = (e^x)^n$.

Exemple 37. On veut simplifier les expressions suivantes :

- Soit $A = e^{-7} \times e^3$. Alors $A = e^{-7+3}$ donc $A = e^{-4}$.
- Soit $B = \frac{e^{1,7} \times e^3}{e^{10}}$. Alors $B = e^{1,7+3-10}$ soit $B = e^{-5,3}$.
- Soit $C = \left(\frac{e \times e^{-5,1}}{e^7} \right)^2$. Alors $C = (e^{1-5,1-7})^2$ soit $C = (e^{-11,1})^2$ donc $C = e^{-22,2}$.

Proposition 35 (Monotonie de la fonction exponentielle)

Pour tous x, y de $\mathbb{R}$, $(x < y \Rightarrow e^x < e^y)$.

Autrement dit, la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a que pour tous x et y de $\mathbb{R}$, $e^x = e^y \iff x = y$.

Exemple 38. • Soit (E) l'équation $e^{3x-1} = 1$.

- ▷ L'équation (E) est définie sur $\mathbb{R}$.
- ▷ Soit x un réel. On sait que $e^0 = 1$ et par stricte croissance de exp, on a

$$\begin{aligned} e^{3x-1} = 1 &\iff e^{3x-1} = e^0 \\ &\iff 3x - 1 = 0 \\ &\iff x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{ \frac{1}{3} \right\}$.

- Soit (F) l'équation $e^{x^2-2x} = e^{x-2}$.
- ▷ L'équation (F) est définie sur $\mathbb{R}$.
- ▷ Soit x un réel. Puisque exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} e^{x^2-2x} = e^{x-2} &\iff x^2 - 2x = x - 2 \\ &\iff x^2 - 3x + 2 = 0 \\ &\iff (x-1)(x-2) = 0 \\ &\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 2 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (F) est $\{1, 2\}$.

Corollaire 36 (Bijection réalisée par l'exponentielle.)

La fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire pour tout y de $\mathbb{R}_+^*$, il existe un unique x de $\mathbb{R}$, $y = \exp(x)$.

Plus précisément, si y est dans $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(y)$ est l'unique réel x tel que $y = \exp(x)$.

En résumé, pour tout y de $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $(e^x = y \iff x = \ln(y))$.

Exemple 39. • Soit (E) l'équation $e^{2x-1} = 2$.

- ▷ L'équation (E) est définie sur $\mathbb{R}$.
- ▷ Soit x un réel. Par stricte croissance de exp, on a

$$\begin{aligned} e^{2x-1} = 2 &\iff 2x - 1 = \ln(2) \\ &\iff x = \frac{1 + \ln(2)}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{ \frac{1 + \ln(2)}{2} \right\}$.

- Soit (F) l'équation $2e^{x^2} = 3$.

▷ L'équation (F) est définie sur $\mathbb{R}$.

▷ Soit x un réel. Par stricte croissance de $\exp$, on a

$$\begin{aligned} 2e^{x^2} = 3 &\iff e^{x^2} = \frac{3}{2} \\ &\iff x^2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \\ &\iff x = \sqrt{\ln(3) - \ln(2)} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\ln(3) - \ln(2)} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (F) est $\left\{-\sqrt{\ln(3) - \ln(2)}, \sqrt{\ln(3) - \ln(2)}\right\}$.

Remarque 37 (Dérivabilité de l'exponentielle et fonction dérivée)

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.

En particulier, $\exp$ est une solution de l'équation différentielle $y' = y$.

3.2 Exercices sur logarithmes et exponentielles

Exercice 15. Expressions en logarithmes et exponentielles.

Simplifier les expressions suivantes :

- | | |
|--|-----------------------------------|
| 1) $A = 3e^{5x}(-4e^{-4x+2})$ | 7) $G = \ln(\sqrt{e})$; |
| 2) $B = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$ | 8) $H = \ln(e^{\frac{1}{3}})$; |
| 3) $C = e^{-10x+3} \times (e^{-x-2})^{-2} \times (e^{3x-2})^3$ | 9) $I = e^{-2\ln 3}$; |
| 4) $D = \ln\left((2 + \sqrt{3})^{20}\right) + \ln\left((2 - \sqrt{3})^{20}\right)$ | 10) $J = \ln(e^{-\frac{1}{2}})$; |
| 5) $E = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$. | 11) $K = \ln(\sqrt[5]{e})$. |
| 6) $F = e^{3\ln 2}$; | |

Exercice 16. Equations en logarithmes et exponentielles.

Résoudre les équations suivantes :

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 1) $\ln(2x) = \frac{1}{2}$; | 3) $e^{2x+\ln 2} + e^{x+\ln 5} = 3$; |
| 2) $\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln 2 = 0$; | 4) $e^{x^2+6x} = \frac{1}{e^9}$. |

Exercice 17. Inéquations en logarithmes et exponentielles.

Résoudre les inéquations suivantes :

- | | |
|---------------------------|------------------------------|
| 1) $1 \leq e^{-x^2+x}$; | 3) $e^{-6x} \leq \sqrt{e}$; |
| 2) $e^{1+\ln x} \geq 2$; | 4) $(\ln x)^2 > 1$. |

3.3 Trigonométrie

Définition 38 (Cosinus et sinus d'un réel)

Soit x un réel. Considérons ABC un triangle rectangle en A tel que l'angle $\widehat{ACB}$ soit x . On appelle **cosinus de x** (resp. **sinus de x**) noté $\cos(x)$ (resp. $\sin(x)$) le réel défini par

$$\cos(x) = \frac{AC}{BC} \left(\begin{array}{c} \text{côté adjacent} \\ \text{hypothénuse} \end{array} \right) \quad \left(\text{resp. } \sin(x) = \frac{AB}{BC} \left(\begin{array}{c} \text{côté opposé} \\ \text{hypothénuse} \end{array} \right) \right)$$

Proposition 39 (Propriétés des fonctions trigonométriques)

- 1) Les fonctions cosinus (notée $\cos$) et sinus (notée $\sin$) sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodiques, c'est-à-dire pour tout x de $\mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.
- 2) La fonction $\cos$ (resp. $\sin$) est paire (resp. impaire) c'est-à-dire pour tout x de $\mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$ (resp. $\sin(-x) = -\sin(x)$).
- 3) Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\cos' = -\sin \quad \text{et} \quad \sin' = \cos.$$

- 4) Valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

- 5) *Variations des fonctions trigonométriques.* Soit k un entier relatif.
 $\cos$ est strictement décroissante sur $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ et strictement croissante sur $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ et $\sin$ est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ et strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$.

Proposition 40 (Relations trigonométriques fondamentales)

Soit a et b deux réels.

- 1) $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$;
- 2) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
- 3) $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$.

Exemple 40. • On veut calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

On observe que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ donc

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{par parité de cos et imparité de sin}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$.

- Calculons $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

▷ *Méthode 1.* On utilise encore le fait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ et

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{par parité de cos et imparité de sin}) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

▷ *Méthode 2.* On sait que $\sin^2 = 1 - \cos^2$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}$ ou $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}$.

On note que $\sin$ est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et puisque $\frac{\pi}{12}$ est dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \geq 0$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}$.

D'après le calcul précédent, on a $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2}$ soit $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{1 - \frac{4+2\sqrt{3}}{8}}$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{8}}$.

En écrivant $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$ et sachant que $\sqrt{3} - 1 > 0$, on obtient $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Dans tous les cas, on a obtenu que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Proposition 41 (Réels ayant même cosinus ou même sinus)

Soit x et y deux réels.

- i) $\cos(x) = \cos(y) \iff (\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + 2k\pi \text{ ou } x = -y + 2k\pi)$
- ii) $\sin(x) = \sin(y) \iff (\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - y + 2k\pi)$

Exemple 41. • Soit (E) l'équation $\cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0, 2\pi]$.

▷ Tout d'abord, on s'intéresse à l'équation $(E') : \cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned}\cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} &\iff \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{8} + k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{8} + k\pi\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E') est $\left\{\frac{\pi}{8} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{8} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

▷ Maintenant, cherchons parmi les solutions de (E') celles qui sont dans $[0, 2\pi]$.

★ Regardons les solutions de (E') de la forme $\frac{\pi}{8} + k\pi$ avec k entier relatif.

Soit k un entier relatif.

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{8} + k\pi \in [0, 2\pi] &\iff 0 \leq \frac{\pi}{8} + k\pi \leq 2\pi \\ &\iff -\frac{1}{8} \leq k \leq \frac{15}{8} \\ &\iff k = 0 \quad (\text{car } k \text{ est entier})\end{aligned}$$

★ Regardons les solutions de (E') de la forme $-\frac{\pi}{8} + k\pi$ avec k entier relatif.

Soit k un entier relatif.

$$\begin{aligned}-\frac{\pi}{8} + k\pi \in [0, 2\pi] &\iff 0 \leq -\frac{\pi}{8} + k\pi \leq 2\pi \\ &\iff \frac{1}{8} \leq k \leq \frac{17}{8} \\ &\iff k = 1 \text{ ou } k = 2 \quad (\text{car } k \text{ est entier})\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}\right\}$.

- Soit (F) l'équation $\sin(3x) = \sin(x)$ sur $] -\pi, \pi]$.
 ▷ Tout d'abord, on regarde l'équation $(F') : \sin(3x) = \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.
 Soit x un réel.

$$\begin{aligned}\sin(3x) = \sin(x) &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 3x = x + 2k\pi \text{ ou } 3x = \pi - x + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\end{aligned}$$

- ▷ Maintenant, cherchons parmi les solutions de (F') celles qui sont dans $] -\pi, \pi]$.

- ★ Regardons les solutions de (F') de la forme $k\pi$ avec k entier relatif.

Soit k un entier relatif.

$$k\pi \in] -\pi, \pi] \iff k \in \{0, 1\}$$

Sous cette forme, on ne retient alors que 0 et π .

- ★ Regardons les solutions de (F') de la forme $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ avec k entier relatif. Soit k un entier relatif.

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \in] -\pi, \pi] &\iff -\pi < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \leq \pi \\ &\iff -\frac{5}{2} < k \leq \frac{3}{2} \\ &\iff k = -2 \text{ ou } k = -1 \text{ ou } k = 0 \text{ ou } k = 1\end{aligned}$$

Sous cette forme, on ne retient alors que $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de (F) est $\left\{ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi \right\}$.

3.4 Exercices sur la trigonométrie

Exercice 18. Autour du formulaire trigonométrique.

- 1) Calculer les expressions suivantes :

- | | |
|-------------------|-------------------|
| a) $\cos(\pi)$ | e) $\cos(2\pi/3)$ |
| b) $\sin(\pi)$ | f) $\sin(2\pi/3)$ |
| c) $\cos(5\pi/6)$ | g) $\cos(3\pi/4)$ |
| d) $\sin(5\pi/6)$ | h) $\sin(3\pi/4)$ |

- 2) Soit x un réel. Simplifier les expressions suivantes (et les exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$) :

- | | | |
|--------------------|----------------------|-----------------------|
| a) $\cos(x + \pi)$ | e) $\cos(\pi/2 - x)$ | i) $\cos(x - 50\pi)$ |
| b) $\sin(x + \pi)$ | f) $\sin(\pi/2 - x)$ | j) $\sin(24\pi - x)$ |
| c) $\cos(\pi - x)$ | g) $\cos(x + \pi/4)$ | k) $\cos(5\pi/2 + x)$ |
| d) $\sin(\pi - x)$ | h) $\sin(x + \pi/4)$ | l) $\sin(x - 3\pi/2)$ |

- 3) Soit a et b deux réels. Montrer les formules suivantes :

- $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$;
- $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$;
- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$;
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$;
- $\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$ et $\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$ (linéarisation de $\cos^2$ et $\sin^2$);
- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$;
- $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$;
- $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$.

 Exercice 19. Équations trigonométriques.

Résoudre sur les équations suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1) $\cos(x) = \frac{1}{2};$ | 4) $\sin(2x - \pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$ |
| 2) $\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2};$ | 5) $\cos(3x) = 0$ sur $[0, \pi]$ |
| 3) $\cos(2x + \pi/3) = \frac{\sqrt{2}}{2};$ | 6) $\sin(4x + \pi/3) = 1$ sur $[-\pi, \pi].$ |

 Exercice 20. Un peu de tout... mais en trigonométrie!

- 1) Montrer que, quand cela a un sens, $\frac{\cos(2t)}{1 - \sin(2t)} = \frac{\cos(t) + \sin(t)}{\cos(t) - \sin(t)}$ (on pourra remplacer 1 par $\cos^2(t) + \sin^2(t)$).

Sur quel ensemble de définition est définie cette formule ?

- 2) Montrer que $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.
- 3) (a) Donner les formules développées de $\cos(a + b)$ et $\cos(a - b)$ puis en déduire une simplification de $\cos(p) + \cos(q)$ en remarquant que $p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}$ et $q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}$.
- (b) *Application* : Montrer que pour tous réels a, b, c :

$$\cos(a + b + c) + \cos(a + b - c) + \cos(a - b + c) + \cos(-a + b + c) = 4 \cos(a) \cos(b) \cos(c).$$

3.5 Dérivation

Définition 42 (Fonction dérivable en un point, dérivable sur un intervalle ou réunion d'intervalles)

Soit I un intervalle (ou réunion d'intervalles) de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Soit a un réel dans I . On dit que f est **dérivable en a** si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Dans ce cas, on note $f'(a)$ cette limite appelé **nombre dérivé de f en a** .
- On dit que f est dérivable sur I si pour tout a de I , f est dérivable en a . Dans ce cas, on appelle **fonction dérivée de f** (ou simplement **dérivée de f**) la fonction $x \mapsto f'(x)$.

Méthode 43 (Tableau des dérivées usuelles)

Pour toute fonction f , on note D_f l'ensemble de définition de f et D'_f l'ensemble des réels a de D_f tels que f est dérivable en a .

On considère n un entier naturel non nul et α un réel **non entier**.

f	D_f	D'_f	f'
$x \mapsto x^n$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$
$x \mapsto x^\alpha$	$\begin{cases} \mathbb{R}_+ & \text{si } \alpha > 0 \\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \mathbb{R}_+ & \text{si } \alpha > 1 \\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos(x)$

Pour la 4ème ligne du tableau, penser par exemple au cas $\alpha = \frac{1}{2}$ donnant $x \mapsto \sqrt{x}$ et au cas $\alpha = -\frac{1}{2}$ donnant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Proposition 44 (Opérations sur les fonctions dérivables)

Soit I un intervalle (ou réunion d'intervalles) de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et λ un réel.

- 1) $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$.
- 2) λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
- 3) fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
- 4) Si g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Exemple 42. • La fonction $f : x \mapsto x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 11x - 4 + e^x - \cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions dérivables et $f' : x \mapsto 4x^3 - 12x^2 + 10x + 11 + e^x + \sin(x)$.

- La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur les fonctions dérivables et $f' : x \mapsto \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$.

Proposition 45 (Composition de fonctions dérivables)

Soit I et J des intervalles (ou réunions d'intervalles) de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur J tels que

- a) $f(I) \subset J$ c'est-à-dire pour tout x de I , $f(x)$ est dans J ;
- b) f est dérivable sur I ;
- c) g est dérivable sur $f(I)$, c'est-à-dire pour tout a de J , g est dérivable en $f(a)$.

Alors $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$, c'est-à-dire pour tout a de I , $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

Exemple 43. Dérivées composées usuelles.

Soit I un intervalle (ou réunion d'intervalles) de $\mathbb{R}$ et u une fonction dérivable sur I et n un entier naturel non nul.

- 1) La fonction $u^n : x \mapsto u(x)^n$ est dérivable sur I par composition de fonctions dérivables et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- 2) On suppose que u ne s'annule pas sur I . Alors $\frac{1}{u} : x \mapsto \frac{1}{u(x)}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.
- 3) On suppose que u est strictement positive sur I . Alors $\sqrt{u} : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- 4) On suppose que u est strictement positive sur I . Alors $\ln(u) : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.
- 5) La fonction $e^u : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$.
- 6) La fonction $\cos(u) : x \mapsto \cos(u(x))$ est dérivable sur I et $(\cos(u))' = -u'\sin(u)$.
- 7) La fonction $\sin(u) : x \mapsto \sin(u(x))$ est dérivable sur I et $(\sin(u))' = u'\cos(u)$.

3.6 Exercices sur la dérivation **Exercice 21. Calcul de dérivées.**

Donner, en le justifiant, le domaine de définition de la fonction puis donner, sans justification, un intervalle où la fonction est dérivable et enfin calculer la dérivée pour chacune des fonctions suivantes; mettre le résultat sous une forme propice à une éventuelle étude de signe

- | | | |
|--|--|----------------------------------|
| 1) $f_1 : x \mapsto (x^2 - 1)^3$ | 4) $f_4 : x \mapsto \sqrt[5]{x^2 + 1}$ | 7) $f_7 : x \mapsto \ln(\ln x)$ |
| 2) $f_2 : x \mapsto \frac{3x+1}{1-x}$ | 5) $f_5 : x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$ | 8) $f_8 : x \mapsto e^{x^2-x+1}$ |
| 3) $f_3 : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ | 6) $f_6 : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ | |

 Exercice 22. Dérivation d'une composée (très classique)

Soit $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

- 1) Montrer que f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ puis calculer f' la dérivée de f .
- 2) Prouver que f' est du même signe que la fonction $h : x \mapsto x - (1+x) \ln(1+x)$ et en déduire les variations de f .
- 3) Déterminer la limite de f en 0.

3.7 Primitives

Définition 46 (Fonction admettant des primitives, primitive d'une fonction)

Soit I un intervalle (ou réunion d'intervalles) de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f **admet des primitives sur I** s'il existe une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$. Dans ce cas, toute fonction F dérivable sur I vérifiant $F' = f$ est appelée **primitive** de f sur I .



En cas d'existence, il y a unicité d'une primitive à une constante près sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Méthode 47 (Tableau des primitives usuelles)

Pour toute fonction f , on note D_f l'ensemble de définition de f et F une primitive de f sur D_f (si elle existe).

On considère n un entier naturel non nul et α un réel non entier.

f	D_f	F
$x \mapsto x^n$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$x \mapsto \frac{2}{3}x^{3/2}$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{1}{x}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \ln(x)$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ (avec $n \neq 1$)	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$
$x \mapsto x^\alpha$	$\begin{cases} \mathbb{R}_+ & \text{si } \alpha > 0 \\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto x \ln(x) - x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$

Proposition 48 (Opérations sur les primitives)

Soit I un intervalle (ou réunion d'intervalles) de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui admettent des primitives sur I . Notons F et G respectivement des primitives de f et g sur I et λ un réel.

- 1) *Combinaison linéaire.* La fonction $\lambda f + g$ admet des primitives sur I et $\lambda F + G$ est une primitive de $\lambda f + g$ sur I .
- 2) *Forme d'une dérivée composée.* $(f \circ G)g$ admet des primitives sur I et $F \circ G$ est une primitives de $(f \circ G)g$.

Exemple 44. Déterminons toutes les primitives de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + 11x - 36 + \cos(x) - e^{2x} + \sin(3x)$ sur $\mathbb{R}$.

- Par opérations sur les fonctions continues sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc par le théorème fondamental de l'intégration, f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
- On trouve que $x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{11x^2}{2} - 36x + \sin(x) - \frac{e^{2x}}{2} - \frac{\cos(3x)}{3}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, il y a unicité des primitives sur $\mathbb{R}$ à constante additive près donc :

$$\text{L'ensemble des primitives de } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \left\{ x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{11x^2}{2} - 36x + \sin(x) - \frac{e^{2x}}{2} - \frac{\cos(3x)}{3} + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exemple 45. Déterminons les primitives de la fonction $f : x \mapsto \sin(x) \cos^3(x)$ sur $\mathbb{R}$.

- Par opérations sur les fonctions continues sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc par le théorème fondamental de l'intégration, f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
- On observe que f est la forme d'une dérivée composée (plus précisément, $f = -u'u^3$ où $u : x \mapsto \cos(x)$) et trouve que $x \mapsto -\frac{\cos^4(x)}{4}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, il y a unicité des primitives sur $\mathbb{R}$ à constante additive près donc :

$$\text{L'ensemble des primitives de } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \left\{ x \mapsto -\frac{\cos^4(x)}{4} + C \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

3.8 Exercices sur les primitives

Exercice 23. Primitives.

Sans préciser leur ensemble de définition, déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto 45x^8 + 6x^2 - 18x + 7$

2) $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

3) $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$

4) $f : x \mapsto \frac{1}{(2x+1)^3}$

5) $f : x \mapsto x(2x^2+1)^4$

6) $f : x \mapsto \sqrt{x} + 1$

7) $f : x \mapsto \sin(2x)$

8) $f : x \mapsto \frac{x}{(x^2+2)^2}$

9) $f : x \mapsto xe^{x^2}$

10) $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{2+3\cos x}$

11) $f : x \mapsto \frac{\sin(\ln(x))}{x}$

12) $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$

Exercice 24. Primitivation par parties.

- 1) Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer que uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.
- 2) À l'aide de la question précédente, montrer que $x \mapsto xe^x$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.
- 3) De même, montrer que $x \mapsto x^{2024} \ln(x)$ admet des primitives sur $\mathbb{R}_+$ que l'on déterminera.

3.9 Calcul intégral

Définition 49 (Définition géométrique de l'intégrale)

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$.

- Si f est positive, l'intégrale de f sur $[a, b]$ notée $\int_a^b f(t) dt$ est l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équation $y = 0$, $x = a$ et $x = b$ et la courbe d'équation $y = f(x)$.



La variable t dans $\int_a^b f(t) dt$ est muette ! Autrement dit, on a $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(\heartsuit) d\heartsuit$.

- On suppose f de signe quelconque. On note f^+ et f^- les fonctions définies par

$$\forall x \in [a, b], \quad f^+(x) = \max(f(x), 0) \quad \text{et} \quad f^-(x) = \max(-f(x), 0).$$

Alors f^+ et f^- sont des fonctions continues et positives sur $[a, b]$ telles que $f = f^+ - f^-$.

On définit alors l'intégrale de f sur $[a, b]$ notée $\int_a^b f(t) dt$ en posant $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f^+(t) dt - \int_a^b f^-(t) dt$.

Dans ce cas, on dit que l'intégrale de f sur $[a, b]$ est l'aire algébrique de la partie du plan délimitée par les droites d'équation $y = 0$, $x = a$ et $x = b$ et la courbe d'équation $y = f(x)$.

Exemple 46. Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$.

On suppose f constante. On dispose alors d'un réel M tel que pour tout x de $[a, b]$, on ait $f(x) = M$.

Alors $\int_a^b f(t) dt = M(b - a)$ (géométriquement, il s'agit de l'aire d'un rectangle de largeur $b - a$ et longueur M).

Remarque 50 (Convention sur les intégrales)

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$.

Par convention, on pose $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$ et $\int_a^a f(t) dt = 0$.

Théorème 51 (Propriétés de l'intégrale de fonctions continues sur un segment)

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

- 1) *Linéarité* : pour tout λ réel, pour toutes fonctions continues f et g sur $[a, b]$, on a

$$\int_a^b (\lambda f + g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt.$$

- 2) *Positivité de l'intégrale* : pour toute fonction f continue et positive sur $[a, b]$, on a $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

- 3) *Fonction continue positive d'intégrale nulle* : toute fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur $[a, b]$ est la fonction nulle sur $[a, b]$.

- 4) *Croissance de l'intégrale* : pour toutes fonctions continues f et g sur $[a, b]$, si $f \leq g$ alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

- 5) *Relation de Chasles* : pour toute fonction f continue sur $[a, b]$ et pour tout c réel de $[a, b]$, on a $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$.

- 6) *Inégalité triangulaire* : pour toute fonction f continue sur $[a, b]$, on a $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$.

Exemple 47. Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$.

On considère M un réel tel que pour tout x de $[a, b]$, on ait $f(x) \leq M$.

Par croissance de l'intégrale, on a $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$ soit $\int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$.

Exemple 48. Montrons que $\int_0^{\pi/2} \cos^{2024}(t) dt > 0$.

La fonction $\cos$ est continue sur $[0, \pi/2]$ donc par produit de fonctions continues, $t \mapsto \cos^{2024}(t)$ est continue sur $[0, \pi/2]$ ce qui permet de justifier l'existence de $\int_0^{\pi/2} \cos^{2024}(t) dt$.

De plus, la fonction $\cos$ est positive sur $[0, \pi/2]$ donc $t \mapsto \cos^{2024}(t)$ est positive sur $[0, \pi/2]$ et par positivité de l'intégrale, on a $\int_0^{\pi/2} \cos^{2024}(t) dt \geq 0$.

Il reste à prouver que $\int_0^{\pi/2} \cos^{2024}(t) dt \neq 0$.

Raisonnons par l'absurde : supposons $\int_0^{\pi/2} \cos^{2024}(t) dt = 0$.

Ainsi, $t \mapsto \cos^{2024}(t)$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0, \pi/2]$ donc est la fonction nulle sur $[0, \pi/2]$ ce qui est absurde car $\cos^{2024}(0) = 1 \neq 0$.

Théorème 52 (Théorème fondamental de l'intégration)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un réel de I et f une fonction continue sur I . On considère F la fonction définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Alors F est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a c'est-à-dire :

- a) F est dérivable sur I , $F' = f$ et $F(a) = 0$;
- b) si G est une primitive de f sur I s'annulant en a alors $F = G$.

Exemple 49. On a défini la fonction logarithme népérien comme l'unique primitive de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+$ s'annulant en 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Exemple 50. Soit f la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_x^{2x} \cos^{2026}(t) dt.$$

La fonction $\cos$ étant continue sur $\mathbb{R}$, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\int_x^{2x} \cos^{2026}(t) dt$ existe donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculons f' .

Notons F l'unique primitive de $\cos^{2026}$ sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0 (le choix de 0 est arbitraire).

Par le théorème fondamental de l'intégration, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x \cos^{2026}(t) dt.$$

Par relation de Chasles, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = F(2x) - F(x) \quad (\text{détaillez avec soin cette étape si c'est nécessaire pour vous...})$$

F étant dérivable sur $\mathbb{R}$, on a par composition et opérations sur les fonctions dérivables que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2F'(2x) - F'(x).$$

Comme pour tout u de $\mathbb{R}$, on a $F'(u) = \cos^{2026}(u)$, on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2\cos^{2026}(2x) - \cos^{2026}(x)$.

Théorème 53 (Théorème fondamental du calcul intégral)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$.

Si F est une primitive de f sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

On note également $[F(t)]_a^b$ le réel $F(b) - F(a)$.

Exemple 51. Pour tout n entier naturel, on a $\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$ soit $\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$.

Exemple 52. Puisque $\sin$ est une primitive de $\cos$ sur $\mathbb{R}$, on a $\int_0^{\pi/2} \cos(t) dt = [\sin(t)]_0^{\pi/2}$ soit $\int_0^{\pi/2} \cos(t) dt = 1$.

Théorème 54 (Intégration par parties)

Soit a et b des réels tels que $a < b$ et u et v deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ telles que u' et v' soient continues sur $[a, b]$ (on dit alors que u et v sont des fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$). Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

où $[u(t)v(t)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Exemple 53. Calculons $\int_0^{\pi/2} t \cos(t) dt$.

Par produit de fonctions continues, $t \mapsto t \cos(t)$ est continue sur $[0, \pi/2]$ donc $\int_0^{\pi/2} t \cos(t) dt$ existe.

On pose $u : t \mapsto \sin(t)$ et $v : t \mapsto t$ de sorte que u et v soient de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$ et $\int_0^{\pi/2} t \cos(t) dt = \int_0^{\pi/2} u'(t)v(t) dt$.

Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} t \cos(t) dt &= [t \sin(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(t) dt \\ &= \frac{\pi}{2} + [\cos(t)]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\int_0^{\pi/2} t \cos(t) dt = \frac{\pi - 2}{2}}$.

3.10 Exercices sur le calcul intégral**✎ Exercice 25. Utilisations du théorème fondamental.**

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^2 (t^2 - t + 1) dt$

5) $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}}$

9) $\int_{-2}^{-1} \frac{dt}{t}$

2) $\int_0^{\pi/2} \cos(2t) dt$

6) $\int_0^1 \frac{1}{(t+1)^2} dt$

10) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{1 + \cos(t)} dt$

3) $\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{t}{3}\right) dt$

7) $\int_0^1 \frac{1}{(2t+3)^3} dt$

11) $\int_0^1 \frac{e^{2t}}{3e^{2t} + 1} dt$

4) $\int_0^1 te^{4t^2} dt$

8) $\int_1^2 \frac{dt}{t}$

12) $\int_1^2 \frac{1}{t(\ln(t)+1)} dt$

✎ Exercice 26. Utilisations d'une intégration par parties.

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 te^t dt$

4) $\int_0^1 t\sqrt{1+t} dt$

2) $\int_1^2 \ln(t) dt$

5) $\int_0^1 t^2 e^t dt$

3) $\int_0^1 t \sin(t) dt$

6) $\int_0^1 e^t \cos(t) dt$

✎ Exercice 27. Étude d'une suite d'intégrales.

On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 t^n e^t dt.$$

1) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

2) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

3) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

4) Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n pour tout entier naturel n .

5) Prouver que $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = e$.