

Mathématiques

pour l'entrée en classe de

TB1

Travail à imprimer et à effectuer pour la rentrée 2026.

Mathématiques à l'usage des étudiants admis en classe préparatoire Technologie-Biologie 1ère année

Travail à imprimer et à effectuer pour la rentrée.

Vous êtes admis en classe de TB1, félicitations.

Les mathématiques sont rarement la matière préférée des étudiants de TB1... et pourtant elle compte autant le jour du concours que les SVT ou les biotechnologies. Les exigences de la classe préparatoire sont différentes de celles du lycée. Afin de faciliter la transition entre le lycée et la classe préparatoire, je vous demande de travailler sérieusement ce polycopié avant la rentrée. L'objectif est de réviser des connaissances de lycée et de collège utiles en classe préparatoire. Le polycopié est découpé en trois parties : les techniques de calcul, la résolution d'équations et d'inéquations et enfin l'étude de fonctions.

- **Calculs** : Le jour du concours, la calculatrice est interdite. Il faudra donc bien maîtriser les techniques de calcul vues au collège et au lycée. Profitez des vacances pour revoir et pratiquer ces techniques : les priorités de calcul addition/produit, le rôle des parenthèses, l'addition et le produit de fractions, le calcul avec les puissances, la racine carrée, les identités remarquables, la factorisation des polynômes du second degré.

- **Résolution d'équations et d'inéquations** : nous nous intéresserons aux équations du premier degré, aux manipulations d'inégalités, aux tableaux de signes pour un produit ou un quotient, au signe d'un polynôme du second degré et à la résolution d'inéquations associées dans les cas simples.

- **Fonctions** : nous reviendrons ici sur quelques fonctions usuelles et sur certaines étapes de l'étude d'une fonction : ensemble de définition, dérivée, tableau de variations, représentation graphique.

Quelques conseils pour travailler avec ce polycopié : apprenez les résultats rappelés, puis cherchez les exemples et les exercices sur une feuille. Pour certains exercices, la solution est donnée afin de pouvoir vérifier votre résultat. Pour les exemples complètement détaillés, n'hésitez pas à les refaire sur une feuille blanche en laissant passer quelques jours après leur lecture pour vérifier que vous avez bien compris. **Ne vous contentez pas d'une lecture superficielle, et ne vous arrêtez pas à la première difficulté, ré-essayez !** Si vous avez des questions, notez les sur une feuille pour pouvoir les poser à la rentrée.

Dès le début de l'année, l'acquis de ce polycopié sera utilisé et exploité en mathématiques et pourra faire l'objet d'un QCM à la rentrée.

Alors bonnes vacances... quelque peu studieuses !

Première partie

Techniques de calcul

I. Développer et factoriser

- ▷ Développer : transformer un produit en une somme
- ▷ Factoriser : transformer une somme en produit

1) Quelques rappels

- ▷ **Priorité des opérations** : le produit et le quotient sont prioritaires par rapport à l'addition et à la soustraction

Exemple : $2 \times 3 + 5 = 6 + 5 = 11$ et $2 + 3 \times 5 = 2 + 15 = 17$

- ▷ **Utilisation des parenthèses** : Si l'on souhaite des priorités différentes de calcul, il faut obligatoirement mettre des parenthèses

Exemple : $2 \times (3 + 5) = 2 \times 8 = 16$ et $(2 + 3) \times 5 = 5 \times 5 = 25$.

Exemple 2 : $(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$ mais $-1^2 = -(1^2) = -1$.

- ▷ **Distributivité** : $a(b + c) = ab + ac$

Exemple : $2 - (x + 2) = 2 - x - 2 = -x$, $x - 2(x - 1) = x - 2x - 2 \times (-1) = x - 2x + 2 = -x + 2$



Le produit ne se distribue pas avec un autre produit : $a \times (b \times c) = a \times b \times c = (a \times b) \times c$.

Exemple : $2 \times (4 \times 3) = 2 \times 4 \times 3 = 8 \times 3 = 24$

2) Identités remarquables

Identités remarquables

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$



Ne pas confondre $(a - b)^2$ et $a^2 - b^2$: la puissance ne se distribue surtout pas sur chacun des termes !

Remarque : Il est important de s'appropriier ces expressions. Pour cela, on pourra commencer par développer le terme factorisé et vérifier que cela correspond bien au terme développé.



Exercice 1.

Selon les expressions données, développer ou factoriser :

- a) $x^2 - 1$ b) $x^2 + 2x + 1$ c) $1 - x^2$ d) $x^2 - 2x + 1$ e) $(x - 2)^2$ f) $(3x + 1)^2$ g) $x^2 - 16$

II. Fractions, puissances, racines carrées

Calculer avec des fractions

- **Addition** : On ne peut additionner des fractions que si elles ont le même dénominateur :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

- **Multiplication par un réel** : Un moins devant une fraction revient à multiplier tout le numérateur par -1 :

$$-\frac{b + c}{d} = \frac{-(b + c)}{d} = \frac{-b - c}{d}$$

Cette proposition se généralise pour un réel quelconque.

**Exercice 2.**

Effectuer les opérations suivantes :

$$a) \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \quad b) \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \quad c) \frac{4}{3} + \frac{3}{4} \quad d) \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \quad e) \frac{1}{7} - \frac{2+3}{6}$$

Calculer avec des fractions (suite)

• **Produit :** $a \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{d}$ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}$

• **Quotient :** $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$ $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

**Exercice 3.**

Effectuer les opérations suivantes :

$$a) 7 \times \frac{2}{3} \quad b) \frac{12}{42} \quad c) 9 \times \frac{5}{3} \quad d) \frac{4}{3} \times \frac{6}{7} \quad e) \frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{7}} \quad f) \frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{5}} \quad g) \frac{4}{\frac{3}{5}} \times \frac{6}{7} \quad h) 2 \times \frac{3}{5} - \frac{3}{\frac{5}{2}}$$

Remarque : La dernière règle du quotient $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ s'énonce souvent ainsi : diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.

Règle pour simplifier des fractions : On commence par factoriser le numérateur puis le dénominateur par le même facteur et ensuite on simplifie en utilisant la règle $\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}$.

Exemple : $\frac{2+4x}{6x+10} = \frac{2(1+2x)}{2(3x+5)} = \frac{1+2x}{3x+5}$



$\frac{2+x}{2}$ n'est pas égal à $1+x$ et $\frac{2}{6+x}$ n'est pas égal à $\frac{1}{3+x}$: dans les deux cas il n'y a pas de facteur 2 devant x donc on ne peut pas simplifier par 2.

Conseil de calcul : Pour calculer avec des fractions, commencer par les simplifier au maximum.

Exemple : $\frac{12}{18} \times \frac{5}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12 \times 5 \times 3}{18 \times 10 \times 9} = \dots$ calcul juste mais fastidieux, alors que :

$$\frac{12}{18} \times \frac{5}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 3} \times \frac{5}{2 \times 5} \times \frac{3}{3 \times 3} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times \cancel{3}}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 3 \times \cancel{2} \times \cancel{5} \times \cancel{3} \times 3} = \frac{1}{9}$$

**Exercice 4.**

1) Simplifier les expressions suivantes : $\frac{1}{2}, \frac{1}{\frac{2}{3}}, \frac{1+\frac{1}{2}}{6}, \frac{2+5}{2+7}, \frac{25}{21} \times \frac{36}{35} \times \frac{14}{15}$.

2) Simplifier si cela est possible : $A = \frac{2+4x}{2+2x}, B = \frac{x+1}{x-1} + \frac{x+1}{x+1}, C = \frac{1+2x}{2x}, D = \frac{1}{x+1} - x \frac{x}{x+1}$.

Calculer avec des puissancesSoient n et m des entiers relatifs. Alors

$$a^n b^n = (ab)^n \quad a^n a^m = a^{n+m} \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n} \quad (a^n)^m = a^{nm}$$

Exemple : $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$ mais 2×3^4 ne peut pas se simplifier (cela fait $2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ et surtout pas $6^4 = 6 \times 6 \times 6 \times 6$)

**Exercice 5.**

Simplifier si cela est possible : $(2^2)^3$, 4×2^3 , 4×2^{-3} , $2^3 \times 3^2$, $10^5 \times 10^{-2}$, $\frac{1}{10^{-2}}$, $2^6 - 2^5$.



$\sqrt{x}$ n'existe que si x est positif : $x \geq 0$.

Calculer avec des racines carrées

Soient a et b des réels **positifs**. Alors

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (\sqrt{a})^2 = a$$

Exemple : $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt{64} = 8$, $\sqrt{81} = 9$, $\sqrt{100} = 10$.

Exemple : $\sqrt{16 \times 9} = \sqrt{16}\sqrt{9} = 4 \times 3 = 12$ mais $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ n'est surtout pas égal à $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$

Application : Simplifier une racine carrée. Par exemple : $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

**Exercice 6.**

1) Écrire plus simplement $\sqrt{18}$ et $\sqrt{32}$.

2) Calculer : a) $(4\sqrt{3})^2$ b) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$ c) $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{50}}{\sqrt{2}}$.

III. Exponentielles et logarithmes**Calculer avec $\ln$**

Soient $x > 0$ et $y > 0$ deux réels. Alors :

- ☛ $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- ☛ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ donc $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- ☛ Si $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(x^n) = n \ln(x)$
- ☛ $\ln(1) = 0$ $\ln(e) = 1$

Remarque : $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs, c'est-à-dire les entiers positifs et négatifs : $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

**Exercice 7.**

Exprimer les quantités suivantes en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$:

a) $\ln(6)$ b) $\ln(24)$ c) $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ d) $\ln\left(\frac{1}{24}\right)$ e) $\ln(2^4 \times 3^2)$ f) $\ln(3072)$

Calculer avec exponentielle

Soient x et y deux réels. Alors :

- ☛ $e^{x+y} = e^x e^y$
- ☛ $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ donc $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- ☛ Si $n \in \mathbb{Z}$, $(e^x)^n = e^{nx}$
- ☛ $e^0 = 1$

**Exercice 8.**

Simplifier les quantités suivantes :

$$a) e^3 e^2 \quad b) (e^3)^2 \quad c) \frac{e^3}{e^2} \quad d) e^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{2}} \quad e) \frac{1}{e^{-2x}} \times (e^x)^2 \quad f) \frac{(e^2)^2}{e^{4x}} \times e^{x^2}.$$

Remarque : Les règles de calcul avec l'exponentielle sont les mêmes qu'avec les puissances.**Lien exponentielle et ln**

- ◆ Si $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.
- ◆ Si $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.

**Exercice 9.**Simplifier les expressions suivantes : $e^{\ln(4x)}$, $e^{3 \ln(x)}$, $\ln\left(\frac{1}{e^x}\right)$, $\ln(3e^x)$.**IV. D'autres exercices pour s'entraîner****Exercice 10 :** Simplifier les expressions suivantes (garder au plus une racine carrée) :

$$A = \sqrt{16+9} \quad B = \sqrt{49-25} \quad C = \sqrt{54} - \sqrt{24} + \sqrt{150} \quad D = \sqrt{12} + \sqrt{27} - 5\sqrt{3}.$$

Exercice 11 : Simplifier les nombres réels suivants (fractions avec un dénominateur entier) :

$$A = \frac{3}{\sqrt{6}} \quad B = -\frac{14}{\sqrt{7}} \quad C = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \quad D = \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1}.$$

Exercice 12 : Soient $A = \sqrt{7-2\sqrt{10}}$ et $B = \sqrt{2}-\sqrt{5}$. Calculer A^2 et B^2 puis comparer A et B .**Exercice 13 :** 1) Écrire sous forme d'un entier : $A = 2^{(2^3)}$ $B = (-5)^2 \times (-2^3)$ $C = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times 9^4$.2) Écrire sous la forme $a^m \times b^n \times c^p$, où a, b, c, m, n, p sont des entiers relatifs :

$$D = \frac{35^2 \times 6^{10}}{14^2 \times 15^5} \quad E = \frac{(-2)^5 \times (-5)^9 \times 9^3}{12 \times 5^2 \times 30^5}.$$

Exercice 14 :1) Simplifier les expressions suivantes : $A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, $B = \frac{\frac{1}{5}}{4}$, $C = \frac{1}{\frac{5}{4}}$, $D = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{8}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{13}}$

2) Si possible, écrire les expressions suivantes sous forme de somme :

$$A = \frac{a + \frac{b}{c}}{d}, \quad B = \frac{n^2 + 3n + 1}{n^2} \text{ pour } n \neq 0.$$

3) Si possible, simplifier les expressions suivantes :

$$A = a^{n-1} \times a, \quad B = (2 + \sqrt{3})^2, \quad C = 3^n \times 2^n, \quad D = 3^a \times 3^b, \quad E = 3^n \times 3^n, \quad F = 2 \times 3^n.$$

4) Factoriser : $A = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$, $B = 1 - n^2 + 1 - n$, $C = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}$, $D = e^{2n} - e^n$.5) Simplifier : $A = \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2$, $B = \frac{2x}{2 + \sqrt{4x^2}}$ avec $x > 0$, $C = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}}$, $D = \frac{2^n}{2}$ 6) Simplifier : $A = \frac{2}{\sqrt{2}}$, $B = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $C = \frac{x}{\sqrt{x}}$ si $x > 0$, $D = \frac{\sqrt{x}}{x}$, $E = (e^{-x})^2$, $F = (e^x)^2$.7) Compléter : $(-1)^n = \begin{cases} \text{si } n \text{ est pair} \\ \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$, $(-x)^n = \left[\quad \right] x^n$

Deuxième partie

Résolution d'équations et d'inéquations

I. Équations du premier degré

Résoudre une équation du premier degré dans $\mathbb{R}$, c'est trouver toutes les valeurs réelles que peut prendre l'inconnue x , de manière à ce que l'égalité des deux membres soit vérifiée. On détermine alors l'ensemble des solutions de l'équation, noté en général $\mathcal{S}$.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $3x + 4 = -2$.

En retranchant 4, on obtient $3x = -6$, puis en divisant par 3 : $x = -2$.

On vérifie que l'équation de départ est vraie pour $x = -2$. On écrit alors : $\mathcal{S} = \{-2\}$.



Rédaction.

Lorsque l'on résout des équations, on raisonne en général par équivalence, et on utilise le symbole $\Longleftrightarrow$. Deux équations sont équivalentes si elles ont le même ensemble de solutions. Ainsi, la résolution de l'équation précédente s'écrit :

$$3x + 4 = -2 \Longleftrightarrow 3x = -6 \Longleftrightarrow x = -2 \text{ donc } \mathcal{S} = \{-2\}.$$



Ne pas confondre le symbole $\Leftrightarrow$ et le symbole $=$. Ils n'ont pas la même signification. Le premier symbole signifie que les équations (ou inéquations) sont équivalentes ce qui veut dire que si la première est vraie, la deuxième aussi et réciproquement. Le deuxième symbole signifie que la première quantité est égale à la deuxième.

Exemple avec des fractions : Résoudre $\frac{5}{2x+1} = 3$.

★ **Méthode 1 :** en multipliant par le dénominateur pour éliminer les fractions et se ramener à une équation du premier degré.

$$\frac{5}{2x+1} = 3 \Leftrightarrow 5 = 3(2x+1) \Leftrightarrow 0 = 6x + 3 - 5 \Leftrightarrow 0 = 6x - 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}, \text{ donc } \mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}\right\}.$$

★ **Méthode 2 :** en passant tout d'un côté et en mettant au même dénominateur. On utilise ensuite le fait qu'une fraction est nulle si et seulement si son numérateur est nul.

$$\frac{5}{2x+1} = 3 \Leftrightarrow \frac{5}{2x+1} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{5 - 3(2x+1)}{2x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{5 - 6x - 3}{2x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - 6x}{2x+1} = 0 \Leftrightarrow 2 - 6x = 0$$

$$\text{Et on retrouve comme à la méthode 1 : } 2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}, \text{ donc } \mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}\right\}.$$



A retenir : une fraction est nulle si et seulement si son numérateur est nul : $\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

Il ne faut surtout pas dire que le dénominateur doit être nul (car alors la fraction n'est pas définie!)



Exercice 1.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\frac{2x+5}{3x+1} = 2$, $\frac{2x+5}{3x+1} = 0$ et $9(2x+7) - 4(3x+2) = x + 42$.

II. Manipulations des inégalités

Addition dans une inégalité

Pour tous nombres réels a, b, c , si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$.

Autrement dit, si on ajoute (ou si on retranche) le même nombre des 2 côtés de l'inégalité, le sens de l'inégalité ne change pas.

Exemples : $2 \leq 5$ donc $2+3 \leq 5+3$ et $2-4 \leq 5-4$

Multiplier une inégalité

- Si on **multiplie** (ou **divise**) les deux membres d'une inéquation par un nombre **positif**, le sens de l'inégalité est inchangé. Formellement : si $a \leq b$ alors pour tout $c \geq 0$, $ac \leq bc$.
- Si on **multiplie** (ou **divise**) les deux membres d'une inéquation par un nombre **négatif**, l'inégalité change de sens. Formellement : si $a \leq b$ alors pour tout $c \leq 0$, $ac \geq bc$.

Exemples : $3 \leq 5$ donc $9 \leq 15$ (multiplication par 3 qui est positif : on garde le sens de l'inégalité).

$3 \leq 5$ donc $-9 \geq -15$ (multiplication par -3 qui est négatif : on change le sens de l'inégalité).

Si $a \leq b$ alors $-a \geq -b$ (multiplication par -1 qui est négatif : on change le sens de l'inégalité).

Passer à l'inverse dans une inégalité

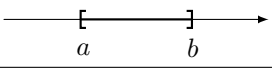
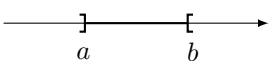
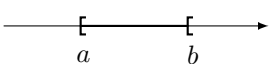
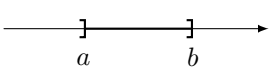
Si a et b sont **tous les deux** positifs (ou tous les deux négatifs) alors $a \leq b \iff \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Exemple : $-5 \leq -2$ donc $-\frac{1}{5} \geq -\frac{1}{2}$

⚠ $-2 \leq 3$ et on a aussi $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{3}$ car un nombre négatif est toujours plus petit qu'un nombre positif.

III. Notations autour des intervalles

On considère deux réels a et b tels que $a < b$.

Notation	Représentation graphique	Ensemble des réels x tels que	
$[a, b]$		$a \leq x \leq b$	$\rightsquigarrow$ L'intervalle est dit fermé
$]a, b[$		$a < x < b$	$\rightsquigarrow$ L'intervalle est dit ouvert
$[a, b[$		$a \leq x < b$	
$]a, b]$		$a < x \leq b$	

- $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels
- $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des éléments positifs de $\mathbb{R}$: ainsi $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$
 $\mathbb{R}_-$ est l'ensemble des éléments négatifs de $\mathbb{R}$: ainsi $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$
 $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{R}$: c'est donc $\mathbb{R}$ privé de zéro
On peut écrire : $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^{+*} =]0, +\infty[$, $\mathbb{R}^{-*} =]-\infty, 0[$
- L'**ensemble vide**, noté $\emptyset$, est un ensemble qui n'a pas d'éléments.

Quelques relations entre les ensembles :

Soient E et F deux ensembles.

- $x \in E$ signifie que x appartient à l'ensemble E ou que x est un élément de l'ensemble E .
- $E \cap F$ se lit " E inter F ". C'est l'**intersection** des ensembles E et F , c'est-à-dire l'ensemble des éléments appartenant à E **et** à F .
- $E \cup F$ se lit " E union F ". C'est la **réunion** des ensembles E et F , c'est-à-dire l'ensemble des éléments appartenant à E **ou** à F .
- $E \setminus F$ se lit " E privé de F ". C'est l'ensemble des éléments de E auquel on enlève tous les éléments de F .

IV. Études de signes avec des fonctions affines

1) Inéquations du premier degré

Quelques exemples de résolution d'inéquations du premier degré. Ici aussi on rédige en utilisant le symbole équivalent : $\Leftrightarrow$

1) Résoudre $5x + 4 \leq 0$.

$$5x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 5x \leq -4 \Leftrightarrow x \leq -\frac{4}{5}. \text{ Ainsi l'ensemble des solutions est } \boxed{\mathcal{S} = \left] -\infty, -\frac{4}{5} \right] }.$$

2) Résoudre $-8x + 2 \leq 0$.

$$-8x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow -8x \leq -2 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}. \text{ (attention au changement de sens !)} \text{ Ainsi } \boxed{\mathcal{S} = \left[\frac{1}{4}, +\infty \right]}.$$

3) Résoudre $2x + 10 > 0$.

$$\text{Cette inéquation s'écrit } x > -5. \text{ Ainsi l'ensemble des solutions est } \boxed{\mathcal{S} =]-5, +\infty[}.$$

2) Signe de $ax + b$

Méthode. pour étudier le signe d'une expression

- 1) On commence par regarder les valeurs de x pour lesquelles l'expression s'annule.
- 2) Dans chaque intervalle restant, on étudie le signe de l'expression.

1) Faire un tableau de signe de $5x + 4$ sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Valeurs de } x \text{ pour lesquelles l'expression s'annule : } 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow 5x = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5}$$

Signe : D'après le paragraphe précédent : $5x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{4}{5}$, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{4}{5}$	$+\infty$
Signe de $5x + 4$	$-$	0	$+$

2) Faire un tableau de signe de $-8x + 2$ sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Valeurs de } x \text{ pour lesquelles l'expression s'annule : } -8x + 2 = 0 \Leftrightarrow -8x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{-2}{-8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Signe : D'après le paragraphe précédent : $-8x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
Signe de $-8x + 2$	$+$	0	$-$

3) Signe d'un produit, d'un quotient

Règle des signes pour un produit et un quotient				
Signe de a	+	+	-	-
Signe de b	+	-	+	-
Signe de ab	+	-	-	+
Signe de $\frac{a}{b}$	+	-	-	+

Exemples :

1) Déterminer le signe de $f(x) = (x-2)(3-x)$.

 **Méthode :** Utiliser la règle des signes d'un produit et faire un tableau de signe.

$x-2=0 \iff x=2$ et $x-2 \geq 0 \iff x \geq 2$; $3-x=0 \iff 3=x$ et $3-x \geq 0 \iff 3 \geq x$, d'où

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
Signe de $x-2$	-	0	+	+
Signe de $3-x$	+	+	0	-
Signe de $f(x)$	-	0	+	-

2) Déterminer le signe de $f(x) = \frac{-x-2}{3-x}$.

 **Méthode :** Utiliser la règle des signes d'un quotient et faire un tableau de signe.

Ensemble de définition de $f(x)$: Ce quotient existe seulement si $3-x \neq 0$ ce qui équivaut à $x \neq 3$. L'ensemble de définition de f est donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

$-x-2=0 \iff -2=x$ et $-x-2 \geq 0 \iff -2 \geq x$; $3-x=0 \iff 3=x$ et $3-x > 0 \iff 3 > x$, d'où

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
Signe de $-x-2$	+	0	-	-
Signe de $3-x$	+	+	0	-
Signe de $f(x)$	+	0	-	+

4) Inéquation avec des produits ou des fractions

 **Méthode :** Se ramener à l'étude du signe d'un produit ou d'un quotient.

1) Résoudre l'inéquation $\frac{x-2}{x-4} \geq 2$.

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de cette inéquation : $x \in \mathcal{D} \iff x \neq 4$, donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

 Pour résoudre cette inéquation, se ramener à l'étude du signe d'un quotient en retranchant 2. **Ne pas** multiplier par $(x-4)$ dans ce cas car on ne connaît pas son signe...

$$\frac{x-2}{x-4} \geq 2 \iff \frac{x-2}{x-4} - 2 \geq 0 \iff \frac{(x-2) - 2(x-4)}{x-4} \geq 0 \iff \frac{-x+6}{x-4} \geq 0. \text{ D'où le tableau de signes :}$$

x	$-\infty$	4	6	$+\infty$
Signe de $-x+6$	+	0	+	-
Signe de $x-4$	-	0	+	+
Signe du quotient	-	0	+	-

d'où $\mathcal{S} =]4, 6]$

2) Résoudre l'inéquation $x+4 \leq x(x+4)$.

 Ne surtout pas simplifier par $x+4$ car ce terme peut s'annuler et on ne connaît pas son signe et cela peut faire changer le sens de l'inégalité.

Méthode : Se ramener à une étude de signe en passant tout d'un seul côté de l'inégalité.

$$x+4 \leq x(x+4) \iff (x+4) - x(x+4) \leq 0$$

 On ne peut PAS faire de tableau de signe pour étudier le signe d'une différence ! Il faut factoriser ici pour se ramener à un produit.

$$(x+4) - x(x+4) \leq 0 \iff (x+4)(1-x) \leq 0$$

$$\text{Or } x+4=0 \iff x=-4 \text{ et } x+4>0 \iff x>-4; \quad 1-x=0 \iff 1=x \text{ et } 1-x>0 \iff 1>x \text{ donc}$$

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
Signe de $x+4$	-	0	+	+
Signe de $1-x$	+	0	+	-
Signe du produit	-	0	+	-

Conclusion : L'ensemble des solutions de l'inéquation $x+4 \leq x(x+4)$ est $\mathcal{S} =]-\infty, -4] \cup [1, +\infty[$.

V. Études de signes avec des polynômes de degré 2

Dans cette dernière section, on cherche à résoudre des inéquations du type $ax^2+bx+c \leq 0$ (ou ≥ 0 , ou < 0 , ou > 0), avec $a \neq 0$. On parle d'inéquations du second degré car la plus grande puissance de x présente est la puissance deux. Au cours de l'année, nous apprendrons à résoudre ces inéquations dans le cas général. Pour le moment, nous nous contentons de les résoudre dans les cas simples.

 **Méthode.** Pour résoudre une inéquation du second degré

- 1) Se ramener à l'étude du signe d'un trinôme du second degré
- 2) Factoriser le trinôme pour étudier son signe (on pourra utiliser une identité remarquable).
- 3) Conclure sur l'ensemble des solutions.

 PAS de tableau de signe pour une somme ! Ils sont réservés aux produits et quotients.

Exemples : 1) Résoudre l'inéquation (I) : $x^2 - 4x \leq 0$

Factorisons le trinôme : $x^2 - 4x = x(x-4)$, donc son signe est donné par le tableau suivant :

$$x-4 > 0 \iff x > 4 \text{ donc :}$$

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
Signe de x	$-$	0	$+$	$+$
Signe de $x - 4$	$-$	$-$	0	$+$
Signe de $x^2 - 4x$	$+$	0	$-$	$+$

D'après le tableau, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est $\mathcal{S} = [0; 4]$

2) Résoudre l'inéquation (I) : $\frac{x-2}{2x-2} \leq \frac{x-2}{x-5}$.

Il ne s'agit pas d'une inéquation du second degré, cependant lors de la résolution nous serons amenés à étudier le signe de polynômes du second degré.

★ L'ensemble de définition de l'inéquation est $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1, 5\}$.

★ Pour tout x de $\mathcal{D}$:

$$(I) \iff \frac{x-2}{2x-2} - \frac{x-2}{x-5} \leq 0 \iff \frac{(x-2)(x-5) - (x-2)(2x-2)}{(2x-2)(x-5)} \leq 0$$

$$(I) \iff \frac{(x-2)(x-5-2x+2)}{2(x-1)(x-5)} \leq 0 \iff \frac{(x-2)(-x-3)}{2(x-1)(x-5)} \leq 0.$$

x	$-\infty$	-3	1	2	5	$+\infty$
Signe de $x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
Signe de $-x - 3$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
Signe de $x - 5$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Signe de $2(x - 1)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
Signe de $\frac{(x-2)(-x-3)}{2(x-1)(x-5)}$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

★ Nous lisons dans le tableau que $\frac{x-2}{2x-2} \leq \frac{x-2}{x-5}$ signifie que $x \in]-\infty, -3] \cup]1, 2] \cup]5, +\infty[$.

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (E) est $\mathcal{S} =]-\infty, -3] \cup]1, 2] \cup]5, +\infty[$.



Exercice 2.

1 Résoudre $(x-8)^2 - (2x+5)^2 < 0$

VI. Quelques exercices pour finir

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$(a) \quad 2x + 5 \leq 7 \quad (b) \quad 3x + 6 > 7x - 2 \quad (c) \quad \frac{x+3}{2} \leq \frac{2x+5}{3} \quad (d) \quad 1 - \frac{x+1}{2} < 2 + \frac{2x-1}{3}.$$

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$(a) \quad (x+5)(x-2) \leq 0 \quad (b) \quad x^2 - 6x + 9 \geq 0 \quad (c) \quad x^2 + x > 0 \quad (d) \quad x^2 \leq 25$$

$$(e) \quad \frac{2x-1}{x+2} < 1 \quad (f) \quad 5 - x^2 \geq 0 \quad (g) \quad \frac{4-x}{7+x} \leq -1 \quad (h) \quad \frac{5-2x}{4-3x} \leq 0.$$

Troisième partie

Fonctions numériques d'une variable réelle

I. Définitions et premiers exemples

1) Vocabulaire et notations

Définition.

- L'**ensemble de définition** $\mathcal{D}$ d'une fonction f (ou le **domaine de définition**) est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe. (soit il est donné dans l'énoncé, soit il faut le déterminer)
- Le réel $f(x)$ est appelé **l'image** de x par f ,
- Un **antécédent** d'un réel y par la fonction f est une valeur de x telle que $y = f(x)$

Remarque : Il est récurrent que des confusions entre les termes antécédent et image apparaissent. Dans un premier temps, il est recommandé de se focaliser sur les exemples présentés dans la partie suivante avant de revenir sur les définitions.

Notations.

On peut définir une fonction de deux manières différentes : par une phrase, ou par une notation spécifique :

- soit on écrit : La fonction f est définie sur D par $f(x) = \dots$

- soit on écrit :

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x)$

Cet encadré se lit “ f est la fonction définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x)$.” Cette notation peut se lire en ligne : la fonction f est définie sur D et à valeurs dans $\mathbb{R}$, à tout réel x elle associe un réel $f(x)$. Les colonnes sont importantes aussi : x appartient à D et $f(x)$ appartient à $\mathbb{R}$. Les deux flèches utilisées sont à bien distinguer également : la première ligne $\rightarrow$ et la deuxième $\mapsto$.

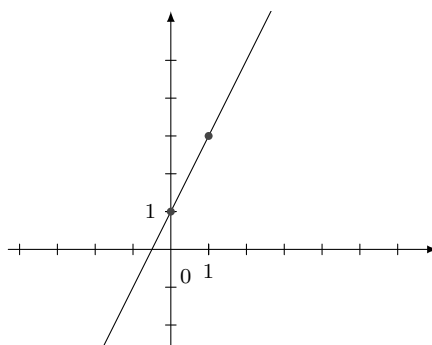
2) Quelques exemples

Exemple 1. Soit $f : x \mapsto 2x + 1$. (se lit “ f est la fonction qui à x associe $2x + 1$ ”.)

★ Ensemble de définition : Pour toute valeur x dans $\mathbb{R}$, le réel $2x + 1$ existe. Donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$. On écrit alors

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x + 1. \end{aligned}$$

★ Courbe représentative de la fonction f :



Cette courbe est la droite d'équation $y = 2x + 1$. On dit que la fonction f est une fonction affine.

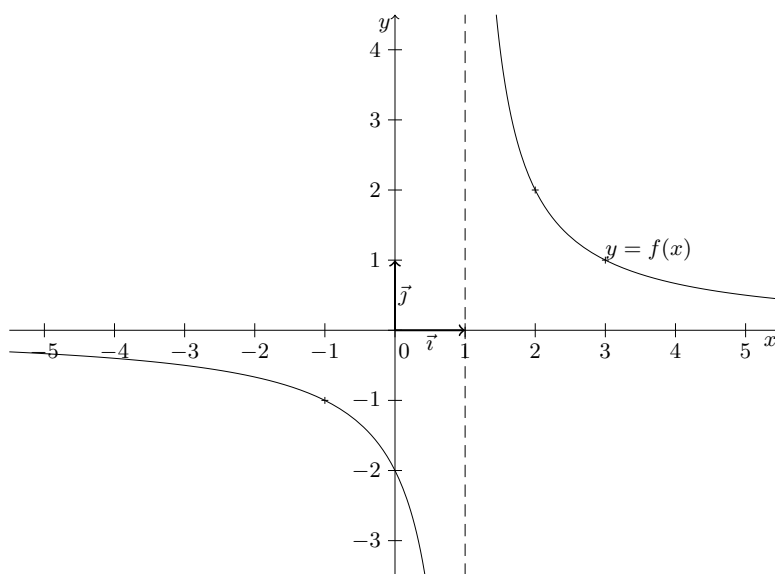
- L'image de 1 par la fonction f est le réel $f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$.
- Le réel 5 possède-t-il des antécédents par la fonction f ? On cherche s'il existe des valeurs de x telles que $f(x) = 5$, autrement dit on va résoudre l'équation $2x + 1 = 5$.
 $2x + 1 = 5 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$: donc le réel 5 possède un unique antécédent par f qui est 2.

Exemple 2. $f : x \mapsto \frac{2}{x-1}$

★ Ensemble de définition : $\frac{2}{x-1}$ existe si et seulement si le dénominateur est différent de zéro donc si et seulement si x est différent de 1. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (se lit " $\mathbb{R}$ privé de 1"), et pour tout élément x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, son image par la fonction f est le réel $f(x) = \frac{2}{x-1}$. On écrit :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2}{x-1}. \end{aligned}$$

★ Courbe représentative de la fonction f :

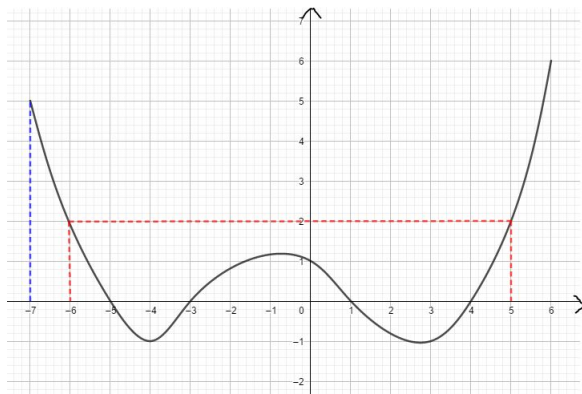


Cette représentation graphique est appelée une hyperbole.

Exemple 3. Recherche graphique d'image et d'antécédents

★ Pour déterminer l'image de x par la fonction f graphiquement, on positionne x sur l'axe des abscisses et on regarde le point de la courbe d'abscisse x : son image est alors l'ordonnée du point considéré.

★ Pour voir si un réel y possède zéro, un ou plusieurs antécédents par la fonction f graphiquement, on positionne y sur l'axe des ordonnées et on regarde si la courbe possède des points d'ordonnées y . Si oui, le ou les antécédents sont alors les abscisses des points considérés.

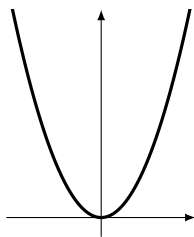


- **Images** : L'image de 0 est 1, l'image de -7 est 5. (en bleu ci-contre)
- **Antécédents** : 0 a quatre antécédents : $-5, -3, 1, 4$
 2 a deux antécédents : $-6, 5$ (en rouge ci-contre)
 6 a un antécédent : 6
 -2 n'a pas d'antécédent

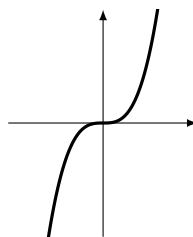
3) Quelques fonctions usuelles

- Quelques fonctions puissances :

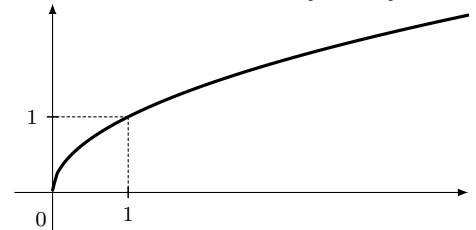
Fonction $x \mapsto x^2$:
Elle est définie sur $\mathbb{R}$.



Fonction $x \mapsto x^3$:
Elle est définie sur $\mathbb{R}$.

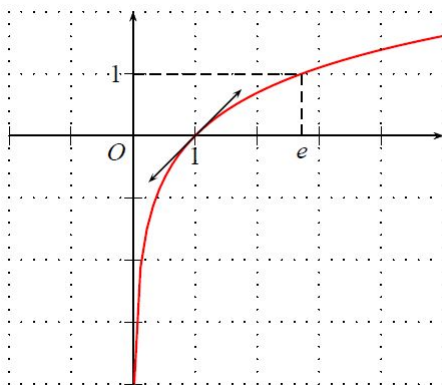


Fonction racine carrée : $x \mapsto \sqrt{x}$
Elle est définie sur $[0, +\infty[$.



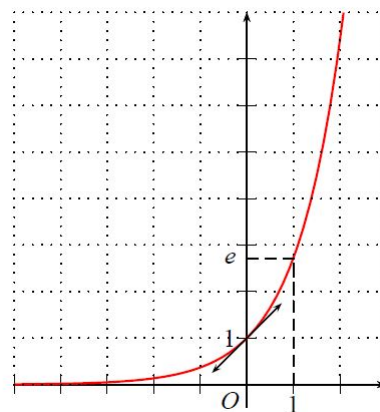
- Fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln(x)$

Cette fonction est définie sur $]0, +\infty[$.



- Fonction exponentielle $x \mapsto \exp(x)$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$.



4) Autour de l'ensemble de définition

Méthode.

Pour chercher l'ensemble de définition d'une fonction

L'objectif est de déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles la fonction existe. Parfois la fonction est définie sur $\mathbb{R}$ mais parfois certaines valeurs sont interdites. Pour l'instant les seules restrictions que nous étudierons concerneront :

- **Les quotients** : un quotient existe si et seulement si le dénominateur est non nul
- **Les racines carrées** : une racine carrée existe si seulement si l'expression située sous la racine est positive : $\sqrt{u(x)}$ existe si et seulement si $u(x) \geq 0$.
- **Le logarithme népérien** ($\ln$) : le logarithme népérien existe si seulement si l'expression située dans celui-ci est strictement positive : $\ln(u(x))$ existe si et seulement si $u(x) > 0$.

⚠ Le zéro est autorisé pour la racine carrée mais pas pour le logarithme.

Exemples : $f : x \mapsto \frac{x+1}{2x-4}$ existe si et seulement si $2x-4 \neq 0$ donc elle est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$f : x \mapsto \sqrt{5-x}$ existe si et seulement si $5-x \geq 0$ donc si et seulement si $x \leq 5$. f est donc définie sur $] -\infty, 5]$.

$f : x \mapsto \ln(x-2)$ existe si et seulement si $x-2 > 0$ donc si et seulement si $x > 2$. f est donc définie sur $]2, +\infty[$.



Exercice 1.

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto 3x$$

$$f_2 : x \mapsto 4x + 5$$

$$f_3 : x \mapsto \sqrt{x^2}$$

$$f_4 : x \mapsto \sqrt{x-2}$$

$$f_5 : x \mapsto \frac{2x+1}{3x+2}$$

$$f_6 : x \mapsto \sqrt{\frac{2x+1}{3x+2}}$$

$$f_7 : x \mapsto \ln(2x-1)$$

$$f_8 : x \mapsto e^{x^2-1}$$

II. Dérivée d'une fonction

Nous verrons en cours d'année la définition de fonction dérivable et de nombre dérivé. L'objectif ici est de s'entraîner à calculer la dérivée d'une fonction et d'en déduire ses variations (croissantes/décroissantes).

1) Dérivées de quelques fonctions usuelles

En dehors de la fonction racine carrée, **les fonctions usuelles sont dérivables sur leur ensemble de définition**. Pour la fonction racine carrée, le zéro pose problème : elle est définie en zéro mais pas dérivable en 0. **Ce tableau des dérivées est à connaître.**

f	$x \mapsto a$	$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto e^x$
définie sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$
dérivable sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$
f'	$x \mapsto 0$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto e^x$

Remarque : La première fonction $f : x \mapsto a$ est la fonction constante égale à a .

2) Opérations sur les dérivées

Théorème 1. (Opérations sur les dérivées)

Soit u et v deux fonctions numériques dérivables sur un intervalle I . Soit a un réel.

- **Somme** : la fonction $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$
- **Produit par une constante** : la fonction au est dérivable sur I et $(au)'(x) = au'(x)$
- **Produit** : la fonction uv est dérivable sur I et $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
- **Inverse** : Lorsque $v(x) \neq 0$, la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable et $\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = \frac{-v'(x)}{v^2(x)}$
- **Quotient** : Lorsque $v(x) \neq 0$, la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable et $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

Remarque : Ces formules peuvent se retenir sans les x . Par exemple : $(uv)' = u'v + uv'$.



Exercice 2.

- 1) Calculer les dérivées des fonctions suivantes : $f_1(x) = 3x^2 + 2x - 3$ $f_2(x) = -x^2 + 4x + 5$

$$f_3(x) = (x+1)(2x+3) \quad f_4(x) = \frac{2}{x-3} \quad f_5(x) = \frac{x+1}{2x+3} \quad f_6(x) = (2x+1)e^x$$

III. Application à l'étude des variations d'une fonction

1) Variations

Proposition.

On considère une fonction f , définie et dérivable sur un intervalle I .

- f est croissante sur I si et seulement si pour tout réel $x_0 \in I$, $f'(x_0) \geq 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tout réel $x_0 \in I$, $f'(x_0) \leq 0$.
- f est constante sur I si et seulement si pour tout réel $x_0 \in I$, $f'(x_0) = 0$.



Exercice 3.

Étudier le sens de variations des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition.

$$f_1 : x \mapsto 3x + 1 \quad f_2 : x \mapsto x^2 \quad f_3 : x \mapsto \frac{1}{2x+3}$$

2) Tableau de variations

En général, plutôt que d'étudier simplement les variations d'une fonction, on construit son tableau de variations, qui nous permet d'avoir un peu plus d'informations sur la fonction f . En effet, sur ce tableau on peut y lire le signe de la dérivée de f , les variations de f , ses valeurs (ou limites) aux bornes de son ensemble de définition, et si il y en a : les endroits où la dérivée s'annule et les valeurs de la fonction à ces endroits. Nous verrons en classe diverses utilisations du tableau de variation.

Méthode.

Pour dresser le tableau de variations d'une fonction f

Étape 1 : Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction f

Étape 2 : Calculer la dérivée f'

Étape 3 : Étudier le signe de la dérivée (en commençant par regarder où elle s'annule).

Étape 4 : Tracer le tableau de variations

Étape 5 : Déterminer les valeurs des extremums (valeurs au bout des flèches).

Exemple : Dressons le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 5x + 6$.

1) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme.

2) Pour tout réel x , $f'(x) = 2x - 5$.

3) Étudions le signe de $f'(x)$.

Pour cela, on commence par regarder où la dérivée s'annule. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

Ensuite on étudie son signe dans les deux cas : $x > \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x - 5 > 0$ et $x < \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x - 5 < 0$

4) On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\star$	$-\frac{1}{4}$	$\star$

5) Valeurs au bout des flèches :

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \times \left(\frac{5}{2}\right) + 6 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6 = \frac{25 - 50 + 24}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Nous verrons qu'à la place des étoiles doivent figurer les limites de la fonction en $+\infty$ et en $-\infty$. Ici il s'agit dans les deux cas de la valeur $+\infty$. Pour l'instant nous ne calculerons pas ces limites.



Exercice 4.

- 1) Développer $(x + 4)(x - 1)$
- 2) Étudier le signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 3x - 4$.
- 3) Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + 5$.

Correction

Première partie

Exercice 1 :

a) $(x-1)(x+1)$ b) $(x+1)^2$ c) $(1-x)(1+x)$ d) $(x-1)^2$ e) x^2-4x+4 f) $9x^2+6x+1$ g) $(x-4)(x+4)$

Exercice 2 :

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{25}{12}$ d) $\frac{2}{15}$ e) $-\frac{29}{42}$

Exercice 3 :

a) $\frac{14}{3}$ b) $\frac{2}{7}$ c) 15 d) $\frac{8}{7}$ e) $\frac{28}{9}$ f) $\frac{4}{15}$ g) $\frac{40}{7}$ h) 0

Exercice 4 :

1. $\frac{1}{6}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{7}{9}, \frac{8}{7}$.

2. $A = \frac{1+2x}{1+x} = 1 - \frac{x}{1+x}, B = \frac{2x}{x-1}, C = \frac{1}{2x} + 1, D = 1 - x.$

Exercice 5 :

$2^6, 2^5, \frac{1}{2}, 2^3 \times 3^2, 10^3, 10^2, 2^5.$

Exercice 6 :

1. $3\sqrt{2}$ et $4\sqrt{2}.$

2. a) 48 b) $5 + 2\sqrt{6}$ c) 7.

Exercice 7 :

a) $\ln(3) + \ln(2)$ b) $4\ln(2) + 2\ln(3)$ c) $\ln(3) + 10\ln(2)$ d) $-\ln(2)$ e) $-\ln(3) - 3\ln(2)$

Exercice 8 :

a) e^5 b) e^6 c) $e^1 = e$ d) $e^{\frac{5}{6}}$ e) $e^0 = 1$ f) $e^{(x-2)^2}$

Exercice 9 :

$4x$ si $x > 0$, x^3 si $x > 0$, $-x$, $\ln(3) + x.$

Exercice 10 :

$A = 5$ $B = 2\sqrt{6}$ $C = 6\sqrt{6}$ $D = 0.$

Exercice 11 :

$A = \frac{\sqrt{6}}{2}$ $B = -2\sqrt{7}$ $C = 4$ $D = \sqrt{3}.$

Exercice 12 :

$A^2 = B^2$, A est positif et B est négatif donc $B = -A.$

Exercice 13 :

1. $A = 256$ $B = -200$ $C = 27$

2. $D = 2^8 \times 3^5 \times 5^{(-3)}$ $E = 2^{(-2)} \times 5^{(2)}.$

Exercice 14 :

A vous de jouer !

Deuxième partie**Exercice 1 :**

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{3}{4} \right\} \quad \mathcal{S} = \left\{ -\frac{5}{2} \right\} \quad \mathcal{S} = \left\{ \frac{-13}{5} \right\}$$

Exercice 2 :

$$\mathcal{S} =]-\infty, -13[\cup]1, +\infty[$$

Exercice 3 :

$$\mathcal{S} =]-\infty, 1] \quad \mathcal{S} =]-\infty, 2[\quad \mathcal{S} = [-1, +\infty[\quad \mathcal{S} =]-1, +\infty[.$$

Exercice 4 :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= [-5, 2] & \mathcal{S} &= \mathbb{R} & \mathcal{S} &=]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[& \mathcal{S} &= [-5, 5] \\ \mathcal{S} &=]-2, 3[& \mathcal{S} &= [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] & \mathcal{S} &=]-\infty, -7[& \mathcal{S} &= \left] \frac{4}{3}, \frac{5}{2} \right]. \end{aligned}$$

Troisième partie**Exercice 1 :**

$$\mathbb{R}, \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}, \quad [2, +\infty[, \quad \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{3} \right\}, \quad]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup \left[-\frac{1}{2}, +\infty[, \quad \left] \frac{1}{2}, +\infty[, \quad \mathbb{R}.$$

Exercice 2 :

$$\begin{aligned} f'_1(x) &= 6x + 2, & f'_2(x) &= -2x + 4, & f'_3(x) &= 4x + 5, \\ f'_4(x) &= -\frac{2}{(x-3)^2}, & f'_5(x) &= \frac{1}{(2x+3)^2}, & f'_6(x) &= (2x+3)e^x. \end{aligned}$$

Exercice 3 :

- f_1 est croissante sur $\mathbb{R}$
- f_2 est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $] -\infty, 0]$
- f_3 est décroissante sur $] -\infty, -\frac{3}{2}[$ et décroissante sur $] -\frac{3}{2}, +\infty[.$

Exercice 4 :

1. On trouve $(x+4)(x-1) = x^2 + 3x - 4 = g(x)$.
2. A partir de la question 1, on trouve la forme factorisée de g et on en déduit son tableau de signe.
3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme. De plus, on trouve $f' = g$. On peut donc déduire du signe de g les variations de f .